I/27

LEITFADEN

DER

ELEMENTAREN MATHEMATIK

VON

ADOLF SICKENBERGER
PROFESSOR AM K. LUITPOLDSGYMNASIUM IN MÜNCHEN.

DRITTER TEIL.

STEREOMETRIE — TRIGONOMETRIE.

MÜNCHEN.
THEODOR ACKERMANN
KÖNIGLICHER HOF-BUCHHÄNDLER.
1888.

LEITFADEN

DER

ELEMENTAREN MATHEMATIK

VON

ADOLF SICKENBERGER
PROFESSOR AM K. LUITPOLDSGYMNASIUM IN MÜNCHEN.

DRITTER TEIL

STEREOMETRIE — TRIGONOMETRIE.

MÜNCHEN.
THEODOR ACKERMANN
KÖNIGLICHER HOF-BUCHHÄNDLER.
1888.

Inhaltsverzeichnis.

Erste Hälfte.

Stereometrie.

Erster Abschnitt. — Offene Gebilde.

		Seite
I.	Die Ebene	1
II.	Lage zweier Graden gegeneinander	2
III.	Lage einer Graden gegen eine Ebene	3
IV.	Lage zweier Ebenen gegeneinander	7
V.	Darstellung räumlicher Gebilde	10
VI.	Die Kugelfläche	13
VII.	Das Körpereck	17

Zweiter Abschnitt. — Geschlossene Gebilde.

VIII.	Polyeder	25
IX.	Inhalt der Polyeder	34
X.	Cylinder und Kegel	38
XI.	Die Kugel	41

Zweite Hälfte.

Trigonometrie.

I.	Das rechtwinklige Dreieck	47
II.	Lineare trigonometrische Funktionen	51
III.	Beziehungen zwischen den Funktionen eines Winkels	55
IV.	Funktionen zusammengesetzter Winkel	59
V.	Das Dreieck im allgemeinen	63
VI.	Das sphärische Dreieck	71

ERSTE HALFTE.

Stereometrie.

Erster Abschnitt. — Offene Gebilde.

I. Die Ebene.

§ 1. ***Begriff.*** *Wenn eine grade Linie sich so bewegt, daß sie immer durch einen festen Punkt geht und eine feste Grade schneidet, so heißt die erzeugte Fläche eine Ebene.* **(1)**

Die bewegte Grade heißt die Erzeugende, die feste Grade die Leitlinie. — Die Ebene ist allseitig unbegrenzt.

§ 2. Die Ebene ist die einfachste Fläche (Planimetrie § 2). Hieraus folgt:

Satz. *Eine Ebene ist durch drei Punkte bestimmt.* **(2)**

Zwei Punkte sind notwendig zur Bestimmung der Leitlinie, und ein Punkt außerhalb derselben gilt als der feste Punkt der Erzeugenden. — Die drei gegebenen Punkte dürfen nicht in einer graden Linie liegen.

Ein vollkommen strenger Beweis dieses Satzes ist nicht möglich, und wegen seiner Einfachheit auch nicht notwendig; es heißt daher dieser Satz das Axiom (Grundsatz) von der Ebene.

Bezeichnung der Ebene: Ebene ABC, Ebene MN, Ebene X.

§ 3. Eine Grade, welche mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, liegt in der Ebene.

Denn: die Grade läßt sich als Leitlinie, oder als irgend eine Lage der Erzeugenden denken.

In der Ebene lassen sich somit nach allen Richtungen grade Linien ziehen.

§ 4. Die Schnittlinie zweier Ebenen ist eine Grade (Kante).

Denn: wäre dies nicht der Fall, so hätten die Ebenen drei nicht in einer Graden liegende Punkte gemein.

II. Lage zweier Graden gegeneinander.

§ 5. Zwei Grade können folgende Lagen gegeneinander haben:

1) Die zwei Graden haben einen Punkt gemein — die Graden schneiden sich. — Zwei sich schneidende Grade liegen in einer Ebene.

2) Die zwei Graden haben keinen Punkt gemein und liegen in einer Ebene — die Graden sind parallel.

3) Die zwei Graden haben keinen Punkt gemein und liegen nicht in einer Ebene — die Graden kreuzen sich, oder sie sind windschief.

§ 6. 1) Zieht man durch einen Punkt eine Parallele zu einer Graden, so liegt diese Parallele in der durch die Grade und den Punkt gehenden Ebene.

2) Wenn eine Grade sich so bewegt, daß sie sich immer parallel bleibt und eine feste Grade schneidet, so erzeugt sie eine Ebene.

§ 7. Drei Ebenen schneiden sich im allgemeinen in drei Kanten. Je zwei derselben liegen in einer Ebene.

a) Angenommen es schneiden sich zwei dieser Kanten, so ist leicht zu zeigen, daß der Schnittpunkt auch der dritten Kante angehört.

b) Angenommen zwei der Kanten sind parallel, so folgt aus dem vorhergehenden, daß jede derselben auch der dritten Kante parallel ist. Demnach:

Satz. *Die Kanten dreier Ebenen schneiden sich entweder alle drei in einem Punkt, oder sie sind paarweise parallel.* **(3)**

§ 8. ***Satz.*** *Zwei Grade, die einer dritten parallel sind, sind auch unter sich parallel.* **(4)**

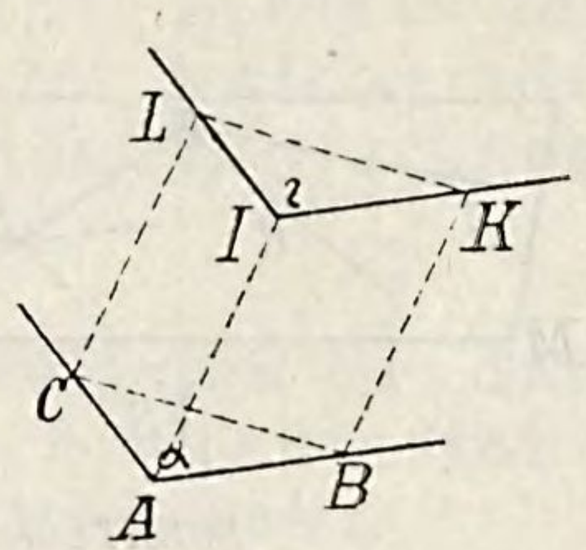
Voraussetzung: AB ∥ EF, CD ∥ EF.

Behauptung: AB ∥ CD.

Beweis. Lege durch AB und EF, ebenso durch CD und EF, endlich durch AB und C eine Ebene; die Kanten dieser Ebenen sind AB, EF, die dritte Kante sei CX.

Da AB ‖ EF, so muß auch CX ‖ EF und CX ‖ AB (Satz **3**) sein. Aus ersterem folgt daß CX mit CD identisch ist, und folglich auch CD ‖ AB. w. b.

§ 9. Es sei AB ‖ IK (gleicher Richtung) und ebenso AC ‖ IL. Mache AB = IK, AC = IL, so ist AI = BK = CL und AI ‖ BK ‖ CL, folglich BC = KL folglich $\alpha = \iota$.



Satz. *Winkel deren beide Schenkelpaare gleichgerichtet sind, sind gleich.* **(5)**

§ 10 1) Winkel, deren eines Schenkelpaar gleich gerichtet, das andere entgegengesetzt gerichtet ist, ergänzen sich zu 180°.

2) Winkel, deren beide Schenkelpaare entgegengesetzt gerichtet sind, sind gleich.

§ 11. ***Begriff.*** *Unter dem Winkel zweier windschiefen Graden wird verstanden der Winkel, welchen sie nach paralleler Verschiebung miteinander bilden.* **(6)**

Dieser Winkel ist nämlich infolge Satz **5** immer derselbe, wie man auch die Verschiebung vornehmen mag.

§ 12. 1) Eine Grade, welche auf einer von zwei Parallelen senkrecht steht, steht auch senkrecht auf der andern.

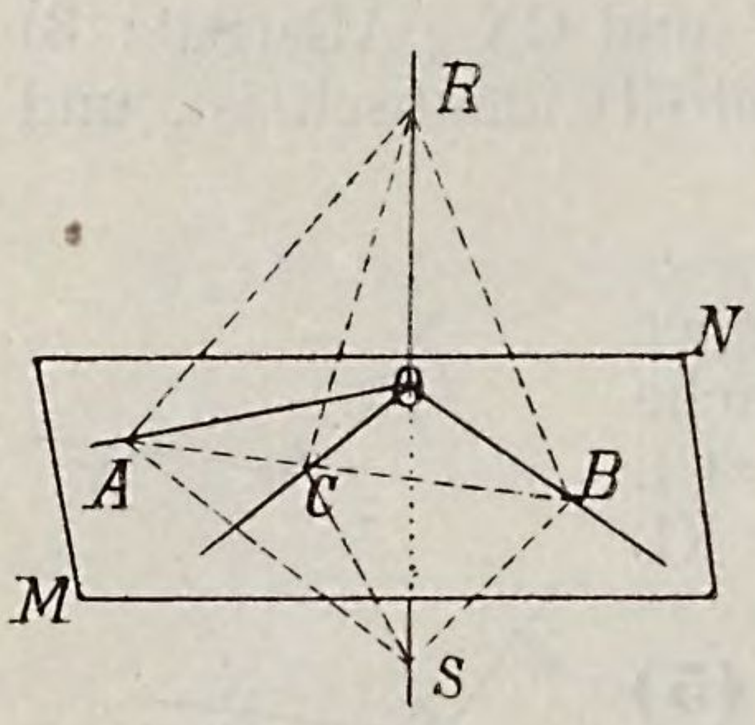
2) Durch einen Punkt giebt es auf eine Grade unzählig viele Lote.

Dies gilt a) wenn der Punkt innerhalb der Graden liegt; denn man kann durch die Grade unzählig viele Ebenen legen, und in jeder derselben auf der Graden ein Lot errichten.

b) Wenn der Punkt außerhalb der Graden liegt, gilt der Satz ebenso; denn man kann zu jedem der nach a) konstruierten Lote durch den Punkt eine Parallele ziehen, welche dann ebenfalls ein Lot zu der Graden ist.

III. Lage einer Graden gegen eine Ebene.

§ 13. Es sei OA ⊥ RS und OB ⊥ RS; durch OA und OB sei die Ebene MN gelegt, und in derselben OC gezogen, so ist auch OC ⊥ RS.



Denn: Es sei OR = OS, und C der Schnittpunkt von AB mit OC, so ist $\triangle$ ABR $\cong$ $\triangle$ ABS (III) folglich CR = CS, folglich OC $\perp$ RS.

Die Sache bleibt dieselbe, wenn RS und OC parallel verschoben werden. Daher:

Satz. *Eine Grade,* **(7)** *welche auf zwei sich schneidenden Graden senkrecht steht, steht senkrecht auf allen Graden der durch letztere bestimmten Ebene.*

§ 14. *1)* ***Begriff.*** *Eine Grade steht senk-* **(8)** *recht auf einer Ebene, wenn sie senkrecht steht auf allen Graden der Ebene.*

2) ***Satz.*** *Eine Grade steht senkrecht* **(9)** *auf einer Ebene, wenn sie senkrecht steht auf zwei sich schneidenden Graden der Ebene.*

§ 15. 1) Durch einen Punkt giebt es auf eine Ebene nur ein Lot.

Denn: Angenommen es gäbe noch ein zweites Lot, so ließe sich durch die beiden Lote eine Ebene legen, und es müßten dann beide Lote auf der Kante senkrecht stehen.

2) Die durch einen Punkt auf einer Graden errichteten Lote liegen in einer Ebene.

Voraussetzung. OA $\perp$ RS, OB $\perp$ RS, OC $\perp$ RS.

Behauptung. OA, OB, OC liegen in einer Ebene.

Beweis. Angenommen es läge OC nicht in der Ebene AOB, und es schnitte Ebene COR die Ebene AOB in der Kante OC', so müßte auch OC' $\perp$ RS sein, was unmöglich ist.

Für den Fall, daß RS nicht durch den Schnittpunkt O geht, läßt es sich durch parallele Verschiebung dorthin verlegen, und der Gedankengang ist derselbe.

§ 16. 1) Das Lot von einem Punkt auf eine Ebene ist die kürzeste Strecke von dem Punkt nach der Ebene.

2) Das Lot von einem Punkt auf eine Ebene heißt der Abstand des Punktes von der Ebene. (Entfernung).

§ 17. 1) Durch einen Punkt giebt es auf eine Grade nur eine senkrechte Ebene (Lotebene).

2) Die Mittellotebene auf einer Strecke ist geometrischer Ort für alle Punkte, welche von den Endpunkten der Strecke gleiche Entfernung haben.

§ 18. 1) Wenn von zwei parallelen Graden die eine auf einer Ebene senkrecht steht, steht auch die andere auf der Ebene senkrecht.

Denn: die eine Parallele steht senkrecht auf allen Graden der Ebene folglich auch die andere.

2) Lote auf derselben Ebene sind parallel.

Indirekt zu beweisen.

§ 19. *1)* ***Begriff.*** *Der Fußpunkt des von* **(10)** *einem Punkt auf eine Ebene gefällten Lotes heißt der Riß (Projektion) des Punktes auf die Ebene.*

2) Der Riß einer Graden auf eine Ebene muß sein die Linie, welche die Rißе aller ihrer Punkte enthält. Zufolge § 18, 2 und § 6, 2 liegen aber alle von den Punkten der Graden auf die Ebene gefällten Lote wieder in einer Ebene; es ist daher der Riß der Graden die Kante dieser Ebenen, und somit selbst eine Grade, daher auch durch zwei Punkte bestimmt. Somit:

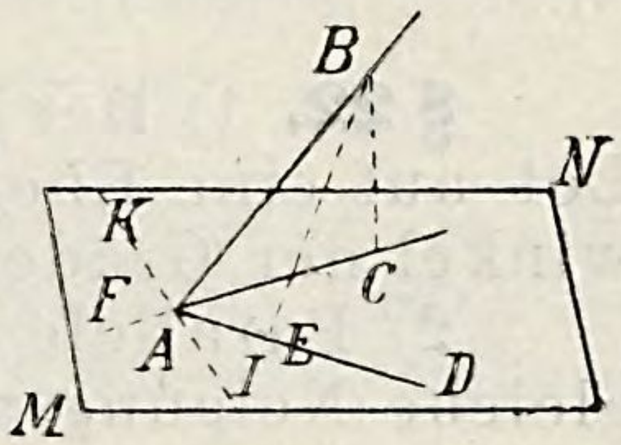
Satz. *Der Riß einer Graden auf eine Ebene* **(11)** *ist die Grade, welche die Risse zweier Punkte der Graden verbindet.*

Der Riß einer Strecke ist die Verbindungsstrecke der Risse ihrer Endpunkte.

3) Die Risse von Punkten und Graden, welche in der Ebene selbst liegen, sind diese Punkte und Graden selbst.

4) Der Riß einer Graden, welche auf der Ebene senkrecht steht, schrumpft zusammen in einen Punkt, den Fußpunkt der Graden.

§ 20. 1) Es sei AB eine Grade schief zur Ebene MN und AC ihr Riß auf die Ebene, d. h. BC ⊥ MN. Ist AD eine andere Grade in der Ebene MN und man fällt von B aus ein Lot auf AD, welches AD in E schnei-



det, so ist BC $<$ BE. Aus der Vergleichung der beiden rechtwinkligen Dreiecke ABC und ABE folgt alsdann:

$$\sphericalangle BAC < \sphericalangle BAD.$$

Satz. *Unter allen Winkeln, welche eine zu einer Ebene schiefe Grade mit den Graden der Ebene bildet, ist der mit ihrem Riß gebildete der kleinste.* **(12)**

2) Hierauf gründet sich folgendes:

Begriff. *Unter dem Neigungswinkel einer Graden gegen eine Ebene versteht man den Winkel, welchen die Grade mit ihrem Riß auf die Ebene bildet.* **(13)**

Wenn die Grade auf der Ebene senkrecht steht, so kann jeder Winkel der Graden mit irgend einer Graden der Ebene als Neigungswinkel gelten.

3) Der stumpfe Nebenwinkel des Neigungswinkels ($\sphericalangle$ BAF) ist der größte unter allen Winkeln der Graden mit einer Graden in der Ebene.

§ 21. 1) Es sei AB eine zur Ebene MN schiefe Grade und AC ihr Riß auf die Ebene, d. h. BC $\underline{|}$ MN; in der Ebene sei gezogen IK $\underline{|}$ AC, so ist auch IK $\underline{|}$ BC also nach Satz 7 IK $\underline{|}$ AB. D. h.

Eine Grade bildet mit einer in einer Ebene gezogenen Graden einen rechten Winkel, wenn letztere auf dem Riß der ersteren Graden senkrecht steht.

Anderer Beweis. Mache AI = AK, so ist CJ = CK, folglich BI = BK folglich AB $\underline{|}$ IK. Oder:

Dritter Beweis. $\overline{AB^2} = \overline{AC^2} + \overline{BC^2}$

$$= (\overline{CI^2} - \overline{AI^2})\,(+\,(\overline{BI^2} - \overline{CI^2}) = \overline{BI^2} - \overline{AI^2},$$

folglich $\sphericalangle BAI = 90^0$.

2) Umkehrung. Wenn eine Grade mit einer in einer Ebene gezogenen Graden einen rechten Winkel bildet, so steht letztere senkrecht zum Riß der ersteren.

Auf gleiche Weise zu behandeln.

§ 22. 1) Der Winkel, den eine Grade mit einem Lot auf eine Ebene bildet, ergänzt den Neigungswinkel der Graden gegen die Ebene zu 90^0.

2) Parallele Grade haben gegen eine Ebene gleiche Neigungswinkel. — Umkehrung?

§ 23. 1) Es sei in der Ebene MN gezogen die Grade CD, und ferner außerhalb MN die Grade AB ‖ CD, so hat AB mit MN keinen Punkt gemein; denn es müßte sonst AB auch mit CD einen Punkt gemein haben. Daher:

Satz. *Eine Grade ist zu einer Ebene parallel,* **(14)** *wenn sie parallel ist zu einer in der Ebene gezogenen Graden.*

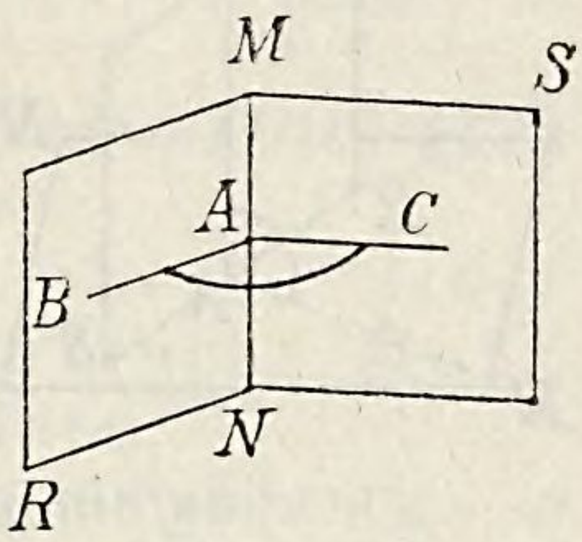
2) Durch einen Punkt giebt es zu einer Ebene unzählig viele parallele Grade.

3) Die durch einen Punkt parallel zu einer Ebene gezogenen Graden liegen alle in einer Ebene.

Denn eine Senkrechte auf der Ebene steht auch senkrecht auf diesen Graden. (Siehe § 15, 2).

IV. Lage zweier Ebenen gegeneinander.

§ 24. 1) Durch die Kante MN gehen die Ebenen MR und NS, einseitig durch die Kante MN begrenzt hiedurch entsteht ein Ebenenwinkel, Flächenwinkel oder Keil. Die einseitig begrenzten Ebenen (Blätter), welche den Keil bilden, heißen dessen Schenkel.



Bezeichnung. ⋀ RMNS, oder ⋀ MN („Keil MN“).

2) Wenn A ein Punkt der Kante MN und AB ⊥ MN in der Ebene MR, AC ⊥ MN in der Ebene NS, so ist ∢ BAC derselbe, wo auch der Punkt A auf der Kante MN liegen mag. Daher:

Begriff. *Unter dem Neigungswinkel zweier Ebenen versteht man den Winkel, welchen die in den Ebenen auf der Kante errichteten Lote mit einander bilden.* **(15)**

Ein Keil wird durch den zugehörigen Neigungswinkel gemessen:

$$\bigwedge \text{RMNS} = \sphericalangle \text{BAC}.$$

3) Ebene ABC ⊥ Kante MN. Daher:

Die Ebene des Neigungswinkels zweier Ebenen steht senkrecht auf der Kante.

§ 25. Wenn zwei Ebenen sich schneiden, so entstehen vier Keile; die nebeneinanderliegenden heißen Nebenkeile, die einander gegenüberliegenden Scheitelkeile.

1) Nebenkeile ergänzen sich zu 180^0.
2) Scheitelkeile sind gleich.

§ 26. 1) Es liege Punkt O zwischen den Schenkeln MR und NS des Keils RMNS. Man fälle OI ⊥ MR und OK ⊥ NS, so ist Ebene IOK ⊥ MN, also Ebene IOK Ebene des Neigungswinkels. Hieraus folgt dann:

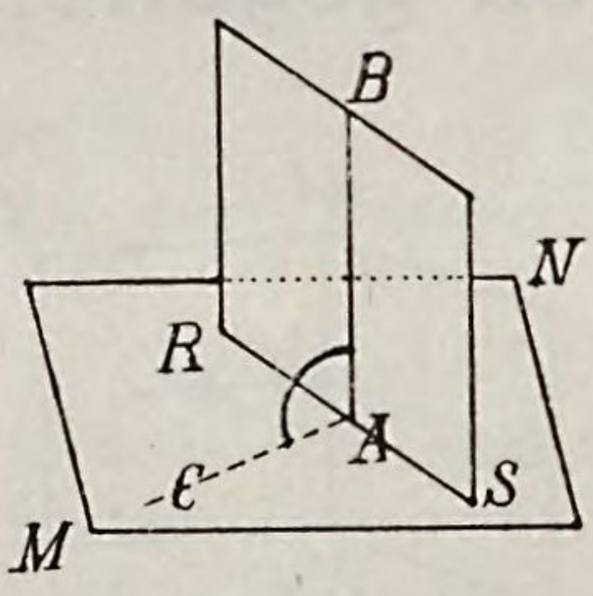
$$\sphericalangle \text{IOK} + \bigwedge \text{MN} = 180^0.$$

2) Liegt Punkt O zwischen den Schenkeln des Scheitelkeils, so ist gleichfalls

$$\sphericalangle \text{IOK} + \bigwedge \text{MN} = 180^0.$$

3) Liegt Punkt O zwischen den Schenkeln eines der Nebenkeile, so ist

$$\sphericalangle \text{IOK} = \bigwedge \text{MN}.$$



§ 27. Es sei AB ⊥ Ebene MN und durch AB gelegt die Ebene RBS. Zieht man in MN die Grade AC ⊥ RS, so ist $\sphericalangle$ BAC der Neigungswinkel der Ebenen MN und RBS. Da nun $\sphericalangle$ BAC $= 90^0$, so ist Ebene RBS ⊥ Ebene MN. D. h.

Satz. *Zwei Ebenen stehen* **(16)** *aufeinander senkrecht, wenn eine Grade der einen Ebene senkrecht steht auf der andern Ebene.*

§ 28. 1) Umkehrung. Wenn zwei Ebenen aufeinander senkrecht stehen, so steht ein Lot auf der Kante in der einen Ebene auch senkrecht auf der andern Ebene.

2) Durch indirekten Beweisgang ergiebt sich noch folgende Umkehrung: Wenn zwei Ebenen aufeinander senkrecht stehen, und man fällt von einem Punkt der einen Ebene ein Lot auf die andere Ebene, so liegt dieses in der ersteren Ebene.

3) Die Kante zweier Ebenen, welche auf einer dritten Ebene senkrecht stehen, steht senkrecht zur dritten Ebene.

Denn: man fälle von einem Punkt der Kante ein Lot auf die dritte Ebene, so muß dieses nach 2) die Kante sein.

4) Die Ebene des Neigungswinkels zweier Ebenen steht senkrecht auf jeder der beiden Ebenen.

§ 29. 1) Durch einen Punkt giebt es auf eine Ebene unzählig viele senkrechte Ebenen; dieselben haben alle eine gemeinsame Kante nämlich das Lot von dem Punkt auf die Ebene.

2) Durch zwei Punkte oder eine Grade giebt es auf eine Ebene nur eine senkrechte Ebene.

§ 30. Wenn drei Ebenen paarweise aufeinander senkrecht stehen, so stehen auch ihre Kanten paarweise aufeinander senkrecht und umgekehrt. (Quadereck).

§ 31. 1) Es sei AB $\perp$ Ebene MN (Fußpunkt A) und AB $\perp$ Ebene RS (Fußpunkt B).

Denken wir uns MN und RS würden sich schneiden, und es wäre X ein Punkt der Kante, so müßte AB $\perp$ AX und AB $\perp$ BX sein, was unmöglich ist. — Die Ebenen MN und RS haben daher keinen Punkt gemein; sie heißen in diesem Fall parallel (MN $\parallel$ RS).

Satz. *Zwei Ebenen, welche auf derselben Gra-* **(17)**
den senkrecht stehen, sind parallel.

2) Umkehrung. Eine Grade welche auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht steht, steht auch senkrecht auf der andern.

Denn: man lege durch die Grade zwei Ebenen, so sind die Kanten dieser Ebenen mit den gegebenen Ebenen unter sich paarweise parallel.

3) Zwei Ebenen, welche einer dritten parallel sind, sind auch unter sich parallel. — Beweis mittelst eines Lotes auf der dritten Ebene.

§ 32. Eine Grade bildet mit zwei parallelen Ebenen gleiche Neigungswinkel. — Beweis mittelst eines Lotes auf die eine Ebene. — Umkehrung?

§ 33. Wenn AB $\parallel$ IK und AC $\parallel$ IL und man errichtet OR $\perp$ Ebene ABC, so ist auch OR $\perp$ Ebene IKL also Ebene ABC $\parallel$ Ebene IKL. D. h.

Satz. *Wenn zwei Paare sich schneidender Gra-* **(18)**
den parallel sind, so sind die durch dieselben gelegten Ebenen parallel.

§ 34. 1) ***Satz.*** *Parallele Ebenen werden von* **(19)**
einer dritten in parallelen Kanten und unter

gleichen korrespondierenden Neigungswinkeln geschnitten.

Beweis. a) Die Kanten sind parallel, weil sie in derselben Ebene liegen und keinen Punkt gemein haben können.

b) Die Neigungswinkelebene für die erste Kante ist dies auch für die zweite Kante; die Schnittlinien dieser Neigungswinkelebene mit den Parallelebenen sind parallel, also die korrespondierenden Neigungswinkel gleich.

2) Umkehrung. Zwei Ebenen, welche von einer dritten in parallelen Kanten und unter gleichen korrespondierenden Neigungswinkeln geschnitten werden, sind parallel.

Beweis mit Hülfe der Neigungswinkelebene und Satz 18.

§ 35. Durch einen Punkt giebt es zu einer Ebene nur eine Parallelebene. — Beweis indirekt.

V. Darstellung räumlicher Gebilde.

§ 36. Zur Darstellung räumlicher Gebilde benützt man zwei auf einander senkrechte Ebenen, Tafeln genannt. Die eine heißt die wagrechte oder erste Tafel, die andere die senkrechte oder zweite Tafel; ihre Schnittlinie heißt die Kante.

Um einen Punkt (A) zu bestimmen, stellt man dessen Risse auf die beiden Tafeln her; der Riß auf die wagrechte oder erste Tafel heißt Grundriß oder erster Riß (A_1), der Riß auf die senkrechte oder zweite Tafel heißt Aufriß oder zweiter Riß (A_2).

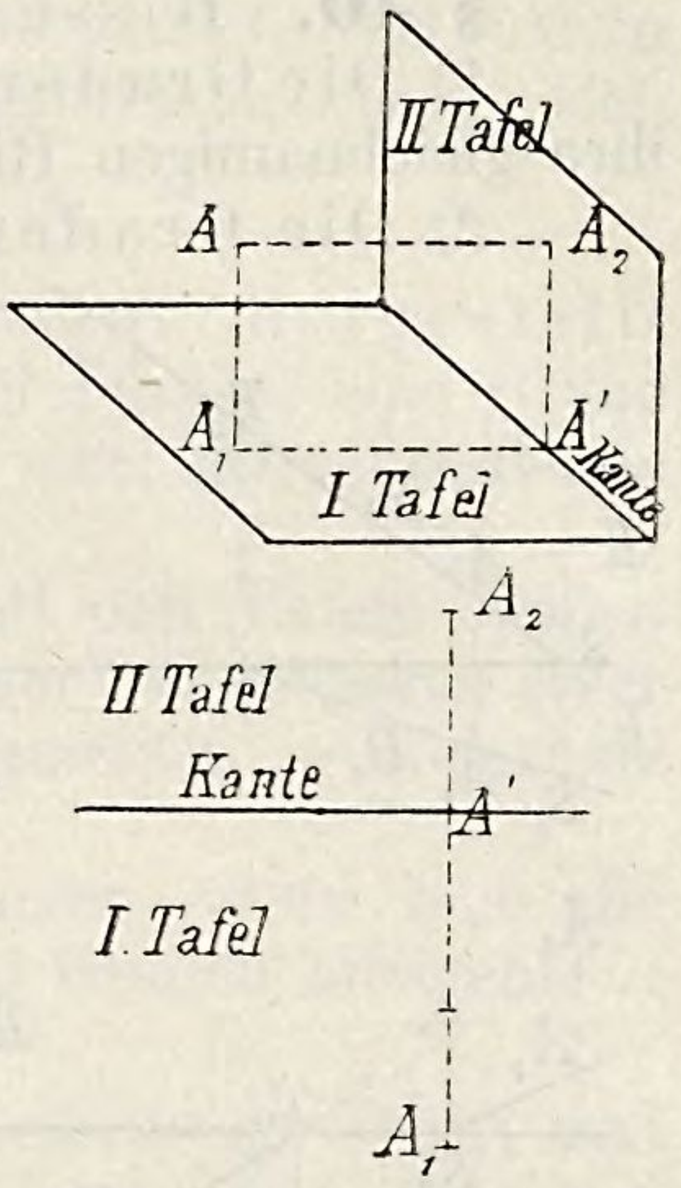
Durch Grundriß und Aufriß ist die Lage eines Punktes im Raum bestimmt. Derselbe liegt da, wo sich die in den Rissen auf den Tafeln errichteten Lote schneiden.

Grundriß und Aufriß eines Punktes müssen so liegen, daß die von den Rissen auf die Kanten gefällten Lote sich in einem Punkte (A') der Kante schneiden.

Die vier Punkte A, A_1, A_2, A' bestimmen ein Rechteck, und es ist

$$AA_1 = A_2A'. \qquad AA_2 = A_1A'.$$

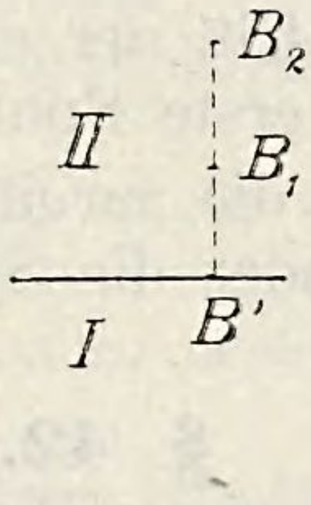
§ 37. Für die Zeichnung klappt man die zweite Tafel um die Kante so um, daß sie in die erweiterte erste Tafel fällt.

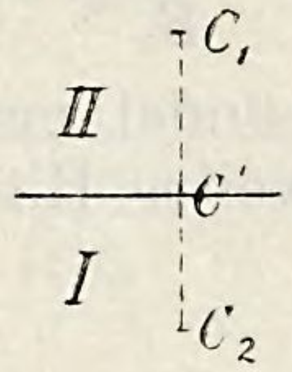


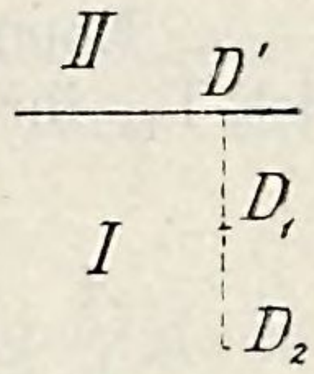
Grundriß und Aufriß eines Punktes liegen dann in einer Senkrechten zur Kante. (Kantenlot).

Um auch Punkte darstellen zu können, welche nicht in dem von den beiden Tafeln gebildeten Keil liegen, erweitere man die Tafeln auf die andere Seite der Kante. Der rückwärts bez. unterhalb der Kante liegende Teil der Tafel heißt die negative Tafel, im Gegensatz hiezu der andere Teil die positive Tafel.

Nach der Umklappung fällt der negative Teil der ersten Tafel zusammen mit dem positiven Teil der zweiten Tafel, und der negative Teil der zweiten Tafel fällt zusammen mit dem positiven Teil der ersten Tafel.







Nebenstehend Grundriß und Aufriß der Punkte B, C, D. B liegt rückwärts oberhalb; C liegt rückwärts unterhalb; D liegt vorwärts unterhalb.

§ 38. Eine Grade ist bestimmt durch ihren Grundriß und Aufriß.

Je zwei in den Tafeln gezogene Grade können als Grundriß und Aufriß einer Graden gelten. Die Grade selbst ist alsdann der Schnitt der durch die Risse zu den Tafeln gelegten Lotebenen.

§ 39. Besondere Fälle.

1) Die Grade liegt in der ersten (zweiten) Tafel; — dann fällt ihr zweiter (erster) Riß in die Kante.

2) Die Grade ist parallel zur ersten (zweiten) Tafel; — dann ist ihr zweiter (erster) Riß parallel zur Kante.

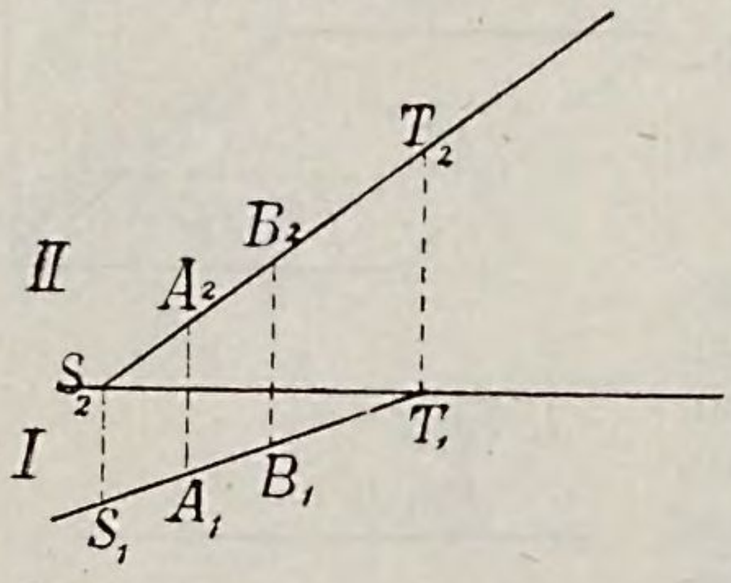
3) Die Grade ist parallel zu beiden Tafeln, d. h. parallel zur Kante; — dann sind ihre beiden Risse zur Kante parallel.

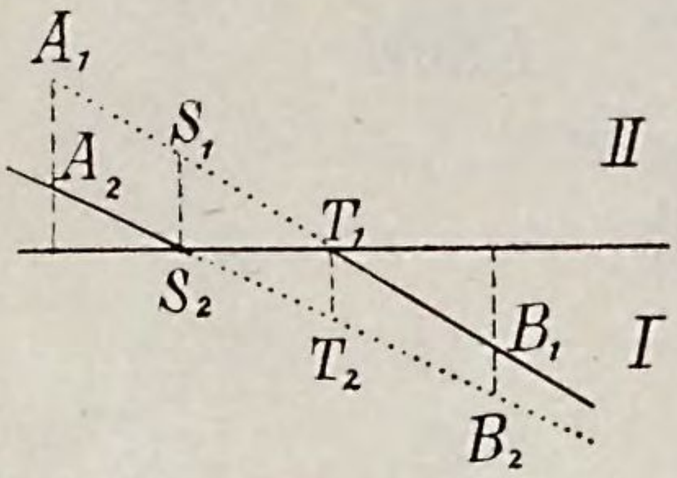
4) Die Grade steht auf der ersten (zweiten) Tafel senkrecht; — dann ist ihr erster (zweiter) Riß ein Punkt, ihr zweiter (erster) Riß ist ein Lot zur Kante, das (verlängert) durch diesen Punkt geht.

§ 40. Risse zweier Graden.

1) Die Graden sind parallel; — dann sind auch ihre gleichnamigen Risse parallel.

2) Die Graden schneiden sich; — dann liegen die Durchschnitte ihrer gleichnamigen Risse in einem Lot zur Kante. Andernfalls sind die Graden windschief.

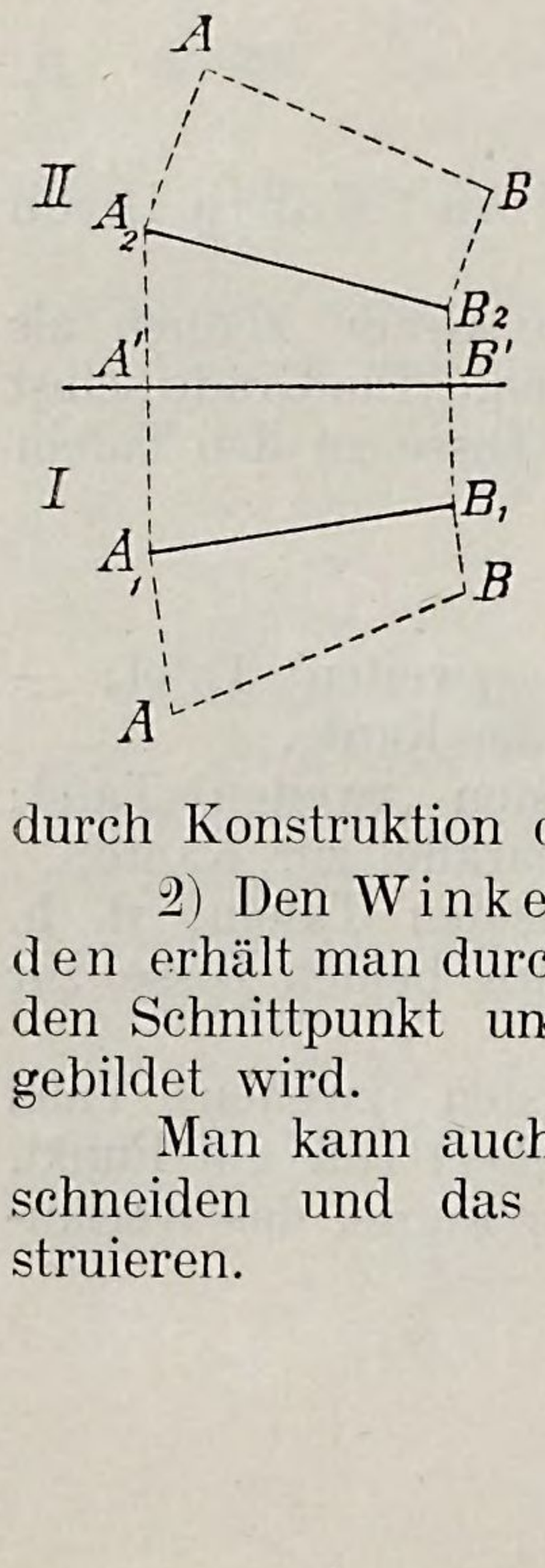




§ 41. Spuren einer Graden nennt man die Punkte, wo die Grade die Tafeln schneidet: erste Spur (S), zweite Spur (T).

Der zweite Riß der ersten Spur (S_2) liegt da, wo der zweite Riß A_2B_2 die Kante schneidet; ein Lot zur Kante ergiebt den ersten Riß der ersten Spur (S_1), oder die erste Spur selbst.

Ebenso findet man die zweite Spur; ihr erster Riß ist T_1, ihr zweiter Riß oder die Spur selbst T_2.



§ 42. Die Entfernung zweier Punkte (A und B) aus ihren Rissen zu konstruieren.

Die Lösung geschieht durch Konstruktion des Trapezes A_1B_1AB, oder des Trapezes A_2B_2AB, wobei man bedenkt, daß $A_1A = A'A_2$ und $B_1B = B'B_2$ (bez. $A_2A = A'A_1$ und $B_2B = B'B_1$).

§ 43. 1) Den Neigungswinkel einer Graden gegen die erste (zweite) Tafel erhält man durch Konstruktion des Dreiecks AS_1A_1 (AT_2A_2).

2) Den Winkel zweier sich schneidenden Graden erhält man durch Konstruktion des Dreiecks, das durch den Schnittpunkt und die beiden ersten (zweiten) Spuren gebildet wird.

Man kann auch die beiden Graden durch eine dritte schneiden und das hiedurch entstandene Dreieck konstruieren.

3) Den Winkel zweier windschiefen Graden erhält man, wenn man sie parallel verschiebt, bis sie sich schneiden.

§ 44. Eine Ebene erscheint dargestellt durch ihre Bestimmungselemente: drei Punkte, eine Grade und einen Punkt außerhalb der Graden, zwei sich schneidende oder zwei parallele Grade.

Die Schnittlinien einer Ebene mit den Tafeln heißen deren Spuren, erste Spur, zweite Spur. Die Spuren einer Ebene müssen sich auf der Kante schneiden — oder sie sind beide zur Kante parallel.

Die Spuren einer Ebene erhält man, wenn man die Spuren zweier in der Ebene liegenden Graden aufsucht.

§ 45. Wenn eine Grade senkrecht steht auf einer Ebene, so stehen die Risse der Graden senkrecht auf den gleichnamigen Spuren der Ebene.

Denn: die erste Spur steht senkrecht auf der Ebene, welche durch die Grade und ihren ersten Riß gelegt ist, also auch senkrecht auf dem ersten Riß.

§ 46. 1) Wenn eine Grade in einer Ebene liegt, so müssen die Spuren der Graden in den gleichnamigen Spuren der Ebene liegen.

2) Wenn ein Punkt in einer Ebene liegt, so muß eine Grade, welche durch den Punkt parallel zur ersten (zweiten) Spur gezogen ist, in der Ebene liegen.

§ 47. 1) Die Spuren der Kante zweier Ebenen sind die Schnittpunkte der gleichnamigen Spuren der Ebenen.

2) Die gleichnamigen Spuren paralleler Ebenen sind parallel.

VI. Die Kugelfläche.

§ 48. ***Begriff.*** *Wenn ein Halbkreis sich um* **(20)** *seinen Durchmesser dreht, erzeugt er eine Kugelfläche (Sphäre).*

Alle Punkte der Kugelfläche sind von einem festen Punkt, dem Mittelpunkt, gleichweit entfernt; diese Entfernung heißt Radius oder Halbmesser. — Sekante; Sehne; Durchmesser; Tangente.

§ 49. Die Linie, in welcher eine Ebene die Kugelfläche schneidet, heißt Kugelschnitt.

Fällt man vom Mittelpunkt der Kugel auf die Ebene eines Kugelschnittes ein Lot, so ergiebt sich, daß der Fußpunkt des Lotes von allen Punkten des Kugelschnitts gleichweit entfernt ist. Daher:

Satz. *Jeder Kugelschnitt ist ein Kreis. — Mittelpunkt desselben ist der Fußpunkt des vom Kugelmittelpunkt auf die Ebene des Kugelschnitts gefällten Lotes.* **(21)**

§ 50. 1) Umkehrung. Die Verbindungslinie des Kugelmittelpunktes mit dem Mittelpunkt eines Kugelschnitts steht auf der Ebene des Kugelschnitts senkrecht.

2) Umkehrung. Ein Lot im Mittelpunkt eines Kugelschnitts auf der Ebene desselben errichtet geht durch den Kugelmittelpunkt.

3) Aufsuchung des Kugelmittelpunktes.

§ 51. Gegeben die vier Punkte A, B, C, D. Es sei R der Mittelpunkt des durch A, B, C gelegten Kreises und RS $\perp$ Ebene ABC, so ist RS geometrischer Ort für alle Punkte, welche von A, B, C gleichweit abstehen.

Es sei ferner MN die Mittellotebene zu AD, so ist diese der geometrische Ort für alle Punkte, welche von A und D gleichweit abstehen.

Der Schnittpunkt der Graden RS und der Ebene MN ist von den vier Punkten A, B, C, D gleichweit entfernt, ist also der Mittelpunkt der durch die vier Punkte gelegten Kugelfläche. Daher:

Satz. *Eine Kugelfläche ist durch vier Punkte bestimmt.* **(22)**

Diese vier Punkte dürfen jedoch nicht in einer Ebene liegen.

§ 52. 1) Gleiche Kugelschnitte stehen vom Mittelpunkt gleichweit ab und umgekehrt.

2) Der größere Kugelschnitt liegt dem Mittelpunkt näher und umgekehrt.

§ 53. 1) ***Begriff.*** *Ein Kugelschnitt, dessen Ebene durch den Kugelmittelpunkt geht, heißt Hauptkreis.* **(23)**

Die Hauptkreise haben mit der Kugelfläche denselben Mittelpunkt und Radius. — Alle Hauptkreise der Kugelfläche sind gleich. — Jeder Hauptkreis teilt die Kugelfläche in zwei kongruente Halbkugelflächen (Hemisphären).

Die nicht durch den Mittelpunkt gehenden Kugelschnitte heißen Nebenkreise.

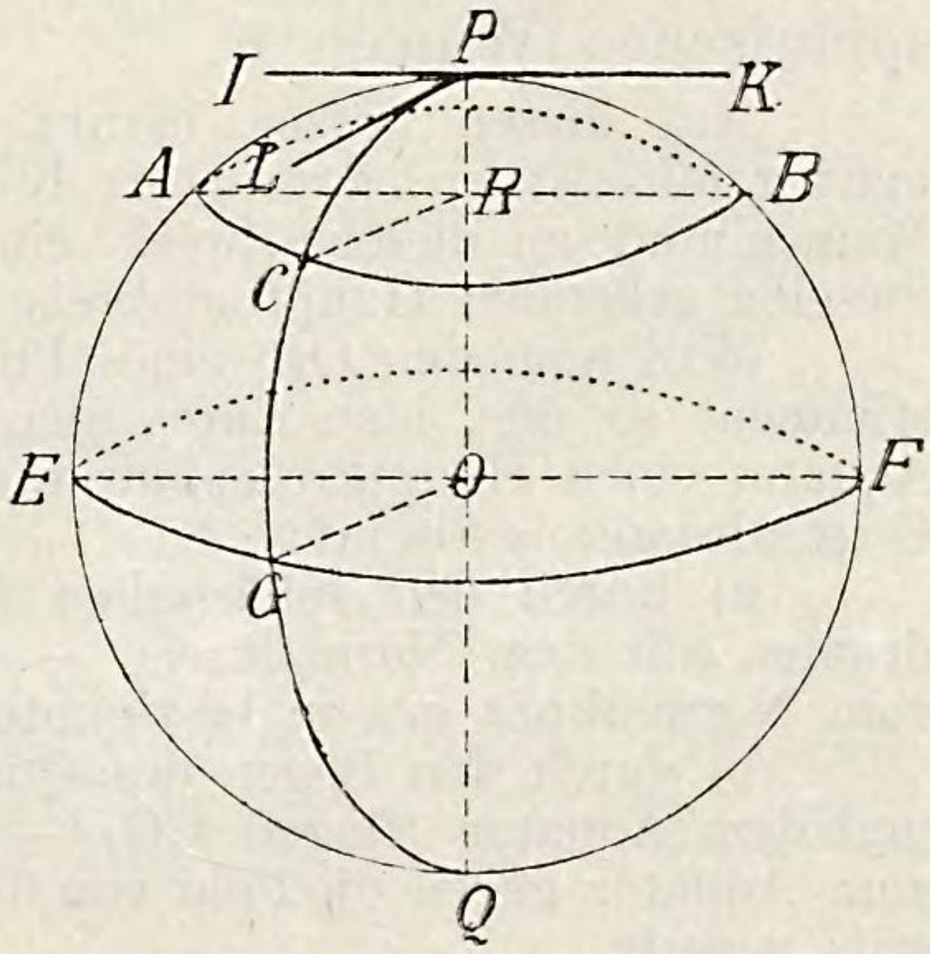
2) Ein Hauptkreis ist größer als ein Nebenkreis. — Die Hauptkreise heißen darum auch größte Kreise.

3) Durch einen Punkt der Kugelfläche giebt es unzählig viele Hauptkreise. Dieselben schneiden sich alle nochmals in einem Punkt, dem Endpunkt des durch den ersten Punkt gelegten Durchmessers.

4) Durch zwei Punkte der Kugelfläche giebt es nur einen Hauptkreis — vorausgesetzt, daß die zwei Punkte nicht die Endpunkte eines Durchmessers sind.

Der zwischen zwei Punkten der Kugelfläche liegende Hauptkreisbogen (im Gradmaß) heißt deren sphärische Entfernung.

§ 54. 1) Der zu einem Kugelschnitt (ABC) senkrechte Durchmesser (PQ) heißt dessen Achse und die Endpunkte des Durchmessers heißen die Pole des Kugelschnitts.



2) Es ist

Bg. AP = Bg. BP = Bg. CP,
Bg. AQ = Bg. BQ = Bg. CQ.

D. h. Alle Punkte eines Kugelschnitts haben von jedem der Pole gleiche sphärische Entfernung.

Die Pole heißen darum auch die sphärischen Mittelpunkte des Kugelschnitts.

3) Zu jeder Achse oder je zwei Polen gehören unzählig viele Kugelschnitte. Dieselben sind alle auf der Achse senkrecht, daher unter sich parallel, und heißen die zur Achse oder den Polen gehörigen Parallelkreise.

4) Der zu einer Achse oder zwei Polen gehörige Hauptparallelkreis (EFG) heißt Äquator. Jeder

Punkt des Äquators hat von beiden Polen eine sphärische Entfernung von 90^0.

§ 55. 1) Zwei Hauptkreisbögen (PA und PC), welche von einem Punkte (P) ausgehen, bilden einen sphärischen Winkel (α).

Begriff. *Der sphärische Winkel wird gemessen durch den Winkel, welchen die im Scheitel an den Schenkeln errichteten Tangenten bilden.* **(24)**

$$\alpha = \sphericalangle \text{IPL}.$$

2) Da PI $\perp$ PQ und PL $\perp$ PQ ist $\sphericalangle$ IPL $= \bigwedge$ APQC, folglich

$$\alpha = \bigwedge \text{APQC}.$$

Satz. *Der sphärische Winkel ist das Maß für den von seinen Hauptkreisebenen gebildeten Keil.* **(25)**

3) Ferner $\sphericalangle$ IPL $= \sphericalangle$ ARC $= \sphericalangle$ EOG

also

$$\alpha = \text{Bg. AC} = \text{Bg. EG}.$$

Satz. *Der sphärische Winkel ist gleich den Bögen der ihm zugehörigen Parallelkreise.* **(26)**

Insbesondere dient der Äquatorbogen EG als Maß des sphärischen Winkels α.

Auf diesen Sätzen beruht die sphärische Ortsbestimmung mittelst sphärischer Koordinaten. (Vergl. Plan. § 90). Man nimmt zu diesem Zweck eine Achse (PQ) an und einen durch dieselbe gehenden Haupthalbkreis (PAQ) als Normalkreis.

Will man den Ort eines Punktes (C) auf der Kugelfläche bestimmen, so legt man durch den Punkt und den Pol (P) bis zum Äquator einen Hauptkreisquadranten (PCG). Die Lage des Punktes C ist alsdann bestimmt:

a) durch den sphärischen Winkel (α) dieses Hauptkreisquadranten mit dem Normalkreis — sphärische Länge — gezählt vom Normalkreis aus in bestimmter Richtung von 0^0 bis 360^0;

b) durch den Bogen des Quadranten zwischen dem Punkt (C) und dem Äquator (Bogen CG) — sphärische Breite — gezählt vom Äquator gegen die Pole von 0^0 bis 90^0 einerseits positiv, andererseits negativ.

Für die Erdkugel ist die Achse die Erdachse und der Normalkreis der Meridian von Greenwich (früher Ferro): geographische Länge (gezählt von West nach Ost), und geographische Breite (nördlich positiv, südlich negativ).

Für die Himmelskugel hat man dreierlei Achsen:

1) Die Achse von Zenit zu Nadir (System des Horizontes). Normalkreis ist der Hauptkreis Zenit = Süd: Azimut (gezählt von Süd über West nach Nord und Ost), und Höhe (gegen das Zenit positiv, gegen das Nadir negativ).

2) Die Himmelsachse (System des Äquators). Hiebei hat man zweierlei Normalkreise:

a) den Normalkreis Nordpol = Zenit = Süd (Meridian): Stundenwinkel (gezählt im Sinne der Drehung der Himmels-

kugel von Ost nach West von 0^0 bis 360^0 oder 0^h bis 24^h) und Deklination (nördlich positiv, südlich negativ);

b) den Normalkreis Nordpol — Frühlingspunkt: Rektaszension (gezählt der Drehung der Himmelskugel entgegengesetzt) und Deklination (w. o.)

3) Die Achse der Ekliptik (System der Ekliptik). Normalkreis ist der Kreis Ekliptikpol — Frühlingspunkt; astronomische Länge (gezählt im Sinne des Laufes der Sonne von West nach Ost), und astronomische Breite (nördlich positiv, südlich negativ.)

§ 56. 1) Es sei PI $\underline{|}$ PO und PL $\underline{|}$ PO (Figur § 54), so ist Ebene IPL $\underline{|}$ PO. Ebene IPL hat dann mit der Kugelfläche nur den Punkt P gemein.

Begriff. *Eine Ebene, welche mit der Kugel-* **(27)**
fläche nur einen Punkt gemein hat, berührt die Kugelfläche und heißt Tangentialebene.

Satz. *Eine Ebene, welche im Endpunkt eines* **(28)**
Radius auf demselben senkrecht steht, ist eine Tangentialebene.

2) Umkehrung. Die Tangentialebene steht senkrecht auf dem an den Berührungspunkt gezogenen Radius.

3) Umkehrung. Ein Lot auf die Tangentialebene im Berührungspunkt errichtet geht durch den Mittelpunkt.

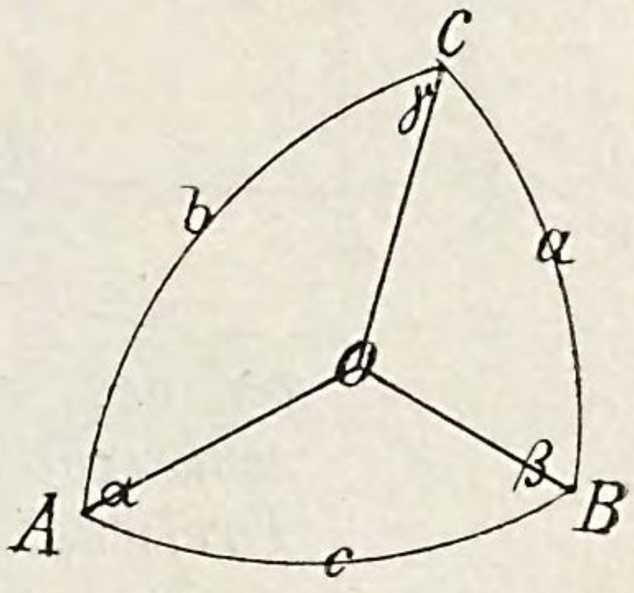
4) Durch einen Punkt der Kugelfläche giebt es an dieselbe nur eine Tangentialebene.

5) Durch einen Punkt außerhalb der Kugelfläche giebt es an dieselbe unzählig viele Tangentialebenen.

6) Durch zwei Punkte (oder eine Grade) außerhalb der Kugelfläche giebt es an dieselbe zwei Tangentialebenen.

VII. Das Körpereck.

§ 57. Vom Punkte O aus gehen drei Strahlen (OA, OB, OC); zwischen je zwei derselben ist eine Ebene gelegt (AOB, BOC, COA). Hiedurch entsteht ein dreiseitiges Körpereck, Dreikant, auch körperliches Dreieck ($\triangle$ OABC) genannt. Der Punkt, von dem die drei



2

Strahlen ausgehen, heißt der Scheitel. — Ähnlich entstehen körperliche Vierecke, . . . n Ecke.

An einem körperlichen Dreieck sind zu unterscheiden:

1) die drei Seiten, d. s. die von je zwei Kanten gebildeten Winkel: ∢ AOB, ∢ BOC, ∢ COA.

2) die drei Winkel, d. s. die von je zwei Ebenen gebildeten Keile: ∧ OA, ∧ OB, ∧ OC.

§ 58. Beschreibt man vom Scheitel eines körperlichen Dreiecks aus mit beliebigem Radius eine Kugelfläche, so werden die drei Ebenen des körperlichen Dreiecks von der Kugelfläche in drei Hauptkreisbögen geschnitten (Bg. AB, Bg. BC, Bg. CA). Diese bilden das dem körperlichen Dreieck zugehörige sphärische Dreieck (△ ABC). — Ähnlich entstehen sphärische Vierecke, . . . n Ecke.

An einem sphärischen Dreieck sind zu unterscheiden:

1) die drei Seiten, d. s. die drei Hauptkreisbögen (im Gradmaß): Bg. AB = c, Bg. BC = a, Bg. CA = b.

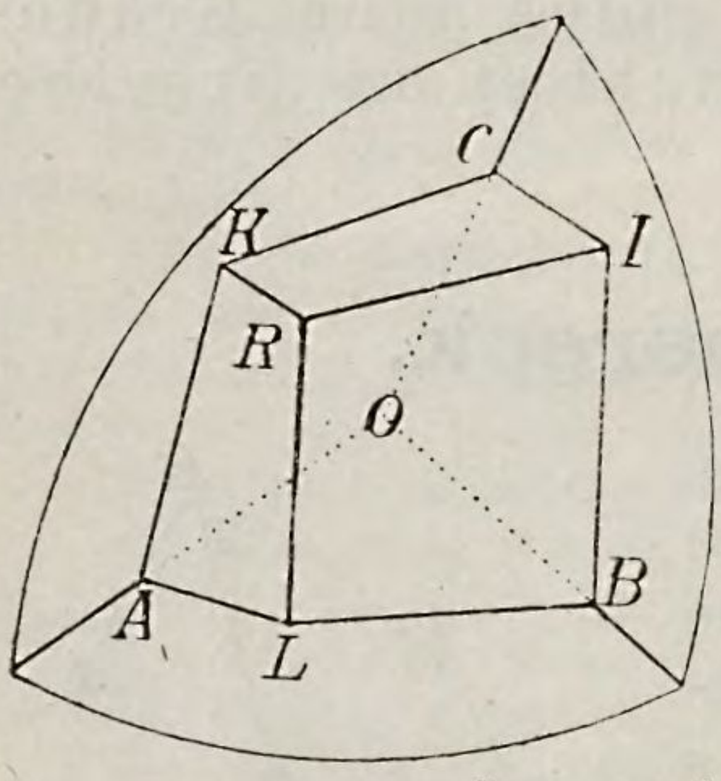
2) die drei Winkel, d. s. die von den Seiten gebildeten sphärischen Winkel: α, β, γ.

Zu jedem körperlichen Dreieck gehört ein sphärisches Dreieck und umgekehrt.

§ 59. Es ist

∢ AOB = Bg. AB = c u. s. w. ∧ OA = α u. s. w.

Satz. *Seiten und Winkel eines körperlichen Dreiecks oder Vielecks sind gleich den Seiten und Winkeln des zugehörigen sphärischen Dreiecks oder Vielecks.* **(29)**



§ 60. 1) Es sei R ein Punkt innerhalb des körperlichen Dreiecks (△ OABC). Man fälle RI ⊥ Ebene BOC, RK ⊥ Ebene COA, RL ⊥ Ebene AOB. Die drei Strahlen RI, RK, RL bestimmen ein zweites körperliches Dreieck, welches genannt wird das zu dem ersten reziproke körperliche Dreieck (△ RIKL).

Begriff. *Die Kanten des reziproken körperlichen Dreiecks stehen senkrecht auf den Ebenen des ersten körperlichen Dreiecks.* **(30)**

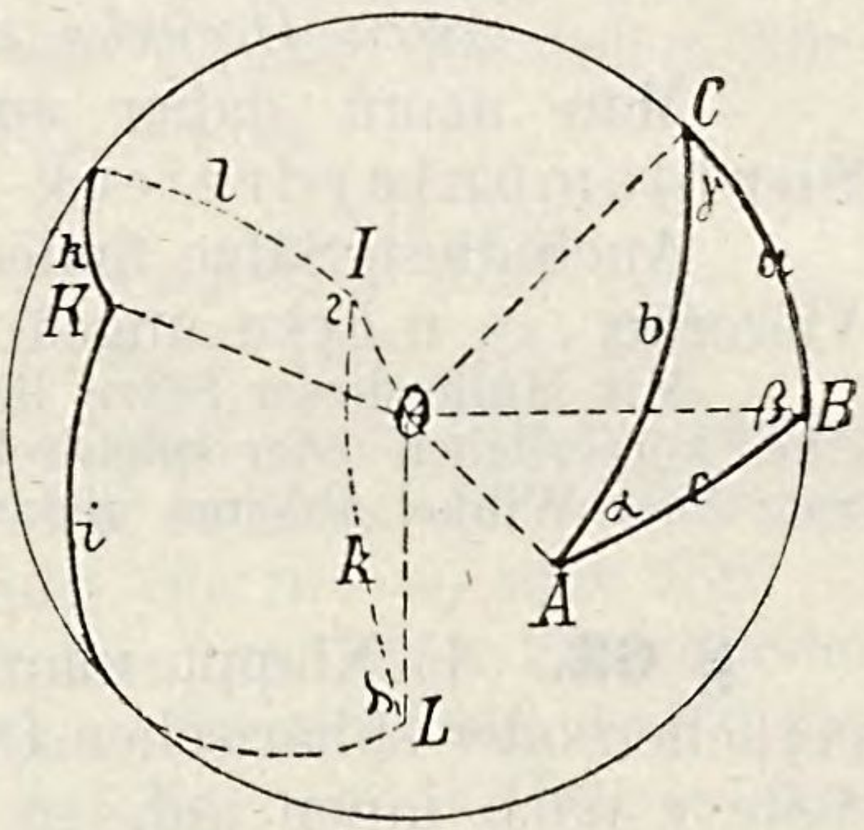
Es ist RI ⊥ OC und RK ⊥ OC folglich Ebene IRK ⊥ OC. D. h.

Satz. *Die Ebenen des reziproken körperlichen Dreiecks stehen senkrecht auf den Kanten des ersten körperlichen Dreiecks.* **(31)**

Das erste körperliche Dreieck ist sonach das reziproke Dreieck zum reziproken Dreieck.

Auf körperliche Vierecke, . . . n Ecke finden diese Begriffe und Sätze ebenfalls entsprechende Anwendung.

§ 61. 1) Vereinigt man den Scheitel des reziproken Dreiecks, mit dem Scheitel des ersten Dreiecks und beschreibt vom Scheitel aus eine Kugelfläche, so erhält man ein sphärisches Dreieck (△ ABC) und das ihm zugehörige reziproke sphärische Dreieck (△ IKL). Es ist alsdann



I der Pol zu Bog. BC,
K „ „ „ „ CA,
L „ „ „ „ AB. D. h.

Begriff. *Die Ecken des reziproken sphärischen Dreiecks sind die Pole zu den Seiten des ersten sphärischen Dreiecks.* **(32)**

Das reziproke sphärische Dreieck heißt darum auch Polardreieck.

2) Ferner ist Bg. IK Äquator zu C, u. s. w.

Satz. *Die Seiten des reziproken sphärischen Dreiecks sind die Äquatoren zu den Ecken des ersten sphärischen Dreiecks.* **(33)**

Das erste sphärische Dreieck ist also reziprok dem reziproken Dreieck. — Auf sphärische Vierecke, . . . n Ecke finden diese Begriffe und Sätze ebenfalls entsprechende Anwendung.

§ 62. 1) Aus Viereck IRKC (Fig. § 60) ergiebt sich, daß

$$\sphericalangle \mathrm{IRK} + \bigwedge \mathrm{OC} = 180^0.$$

Ebenso folgt in Figur § 61, wenn man die Schenkel des sphärischen Winkels γ verlängert, bis sie den Äquator IK schneiden:

$$1 + \gamma = 180^0.$$

Satz. *Die Seiten des reziproken körperlichen oder sphärischen Dreiecks ergänzen die Winkel des ersten Dreiecks zu 180^0.* **(34)**

2) Aus Viereck AOBL (Fig. § 60) ergiebt sich, daß

$$\text{RL} + \sphericalangle \text{AOB} = 180^0.$$

Ebenso folgt in Figur § 61, wenn man die Schenkel des sphärischen Winkels λ verlängert, bis sie den Äquator AB schneiden:

$$\lambda + \text{c} = 180^0.$$

Satz. *Die Winkel des reziproken körperlichen oder sphärischen Dreiecks ergänzen die Seiten des ersten Dreiecks zu 180^0.* **(35)**

Man nennt daher auch das reziproke Dreieck das Supplementardreieck zum ersten.

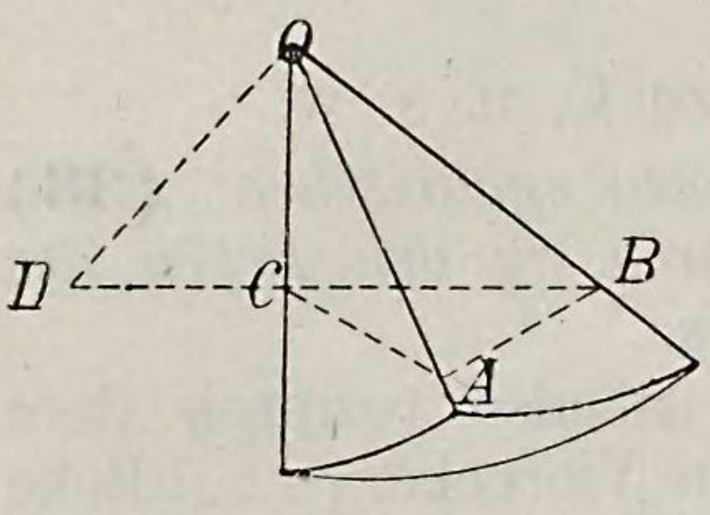
Auch diese Sätze finden auf körperliche und sphärische Vierecke, . . . n Ecke ungeänderte Anwendung.

Mit Hülfe dieser Sätze läßt sich aus einem Satz über Seiten eines körperlichen oder sphärischen Dreieckes, . . . n Eckes sofort ein Satz über Winkel ableiten und umgekehrt.

§ 63. 1) Klappt man die Seiten a und b eines körperlichen oder sphärischen Dreiecks in die Ebene der dritten Seite c nach innen auf, so müßen dieselben übereinander übergreifen und es muß

$$\mathbf{a + b > c.}$$

Satz. *Die Summe zweier Seiten eines körperlichen oder sphärischen Dreiecks ist größer als die dritte.* **(36)**



Anderer Beweis. Man lege die Ebene ABC senkrecht zur Kante OC, und klappe $\triangle$ OCA um OC um, bis es in die erweiterte Ebene BOC fällt als $\triangle$ OCD, so ist BD $>$ AB also auch $\sphericalangle$ BOD $>$ $\sphericalangle$ AOB d. h. a + b $>$ c w. b.

2) Es ist ebenso für das reziproke Dreieck ($\triangle$ IKL)

$$\text{i} + \text{k} > \text{l},$$

folglich $(180^0 - \alpha) + (180^0 - \beta) > 180^0 - \gamma,$

oder $180^0 + \gamma > \alpha + \beta.$

§ 64. Klappt man die Ebenen der Seiten eines körperlichen oder sphärischen n Ecks (a_1, a_2, . . . a_n) in eine Ebene auf, so muß eine Kante doppelt erscheinen: d. h. es muß:

$$a_1 + a_2 + \ldots . a_n < 360^0.$$

Satz. *Die Summe der Seiten eines körper-* **(37)**
lichen oder sphärischen n Ecks ist kleiner als 360^0.

Anderer Beweis. Ein Hauptkreis der Kugel ist immer größer als die Summe der Seiten irgend eines sphärischen n Ecks.

Dritter Beweis. Man schneide das körperliche n Eck durch eine Ebene und wende auf jedes der n entstandenen körperlichen Dreiecke Satz **36** an.

§ 65. Es seien i_1, i_2, i_3 . . . i_n die Seiten des reziproken n Eckes, α_1, α_2 . . . α_n die Winkel des ersten körperlichen oder sphärischen n Ecks, so ist

$$(i_1 + \alpha_1) + (i_2 + \alpha_2) + (i_3 + \alpha_3) + \ldots . (i_n + \alpha_n) = n \cdot 180^0.$$

folglich 1) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots . \alpha_n < n \cdot 180^0$

2) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \alpha_n > (n - 2) \cdot 180^0$.

Satz. *Die Summe der Winkel eines körper-* **(38)**
lichen oder sphärischen n Ecks ist kleiner als n mal 180^0, *und größer als (n—2) mal* 180^0.

Der Überschuß der Winkelsumme eines körperlichen oder sphärischen n Ecks über (n — 2) mal 180^0 d. h. über die Winkelsumme des ebenen n Ecks heißt sphärischer Exzeß (ε).

§ 66. 1) In einem körperlichen oder sphärischen Dreieck liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt.

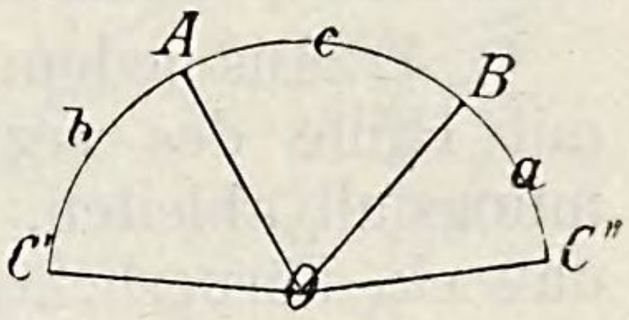
Beweis: durch Herstellung der Neigungswinkel mittelst kongruenter Dreiecke.

2) In einem körperlichen oder sphärischen Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber und umgekehrt.

Beweis: ähnlich wie in 1) durch Herstellung der Neigungswinkel.

§ 67. 1) Von einem körperlichen oder sphärischen Dreieck seien gegeben die drei Seiten a, b, c. Man denke sich dieselben in eine Ebene aufgeklappt als ∢ BOC", ∢ AOC', ∢ AOB. (Fig. a). Dreht man die Winkel ∢ AOC' und ∢ BOC" um die Kanten AO und BO herum, so müßen sich die bewegten

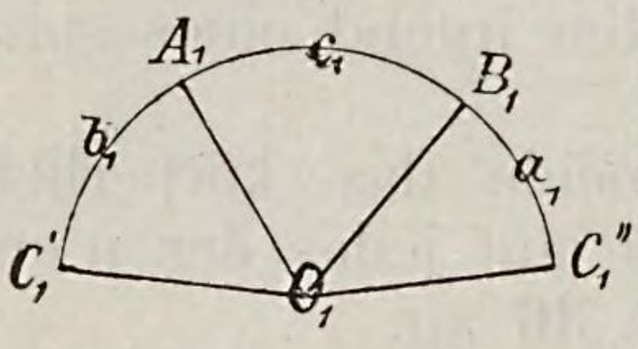
a)



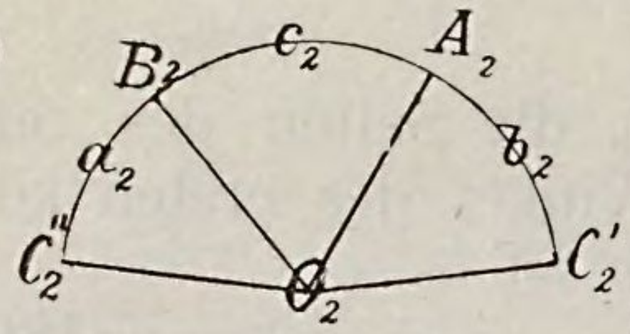
Kanten OC' und OC'' in der Lage der Kante OC begegnen. Das körperliche oder sphärische Dreieck ist somit bestimmt.

Stellt man ein zweites körperliches oder sphärisches Dreieck her ($\triangle O_1A_1B_1C_1$) mit denselben Seiten: $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$ (Fig. b), und zwar so, daß die entsprechenden Seiten dieselbe Aufeinanderfolge haben, so erhält man dasselbe körperliche oder sphärische Dreieck. Die beiden Dreiecke decken sich und heißen kongruent.

b)



c)



Nimmt man dagegen in einem dritten körperlichen oder sphärischen Dreieck ($\triangle O_2A_2B_2C_2$) die entsprechenden Seiten in umgekehrter Aufeinanderfolge (Fig. c), so decken sich das erste und dritte Dreieck nicht unmittelbar, sondern nur in ihrer Scheitellage, d. h. so daß die Kanten des einen in die Rückwärtsverlängerungen der Kanten des andern fallen (d. h. daß die Ecken des sphärischen Dreiecks $A_2B_2C_2$ den Ecken des sphärischen Dreiecks ABC diametral gegenüber liegen). In diesem Fall heißen die beiden Dreiecke symmetrisch.

2) Ähnlich zu behandeln der Fall, wenn gegeben sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel: $\measuredangle AOB = c$, $\measuredangle AOC' = b$, $\bigwedge OA = \alpha$ (Fig. a). Man dreht den Winkel AOC' um die Kante OA bis die Ebenen den Winkel α bilden.

3) Ebenso der Fall, wenn gegeben sind zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel: $\measuredangle AOB = c$, $\measuredangle BOC'' = a$, $\bigwedge OA = \alpha$ (Fig. a). Man denke sich in OA eine Ebene aufgestellt, welche mit der Ebene AOB den Winkel α bildet, und drehe Winkel BOC'' so lange um die Kante OB, bis die bewegte Kante OC'' in die genannte Ebene fällt. Hiebei ist zu unterscheiden:

a) wenn $a > c$ ist das Dreieck eindeutig bestimmt,

b) wenn $a < c$ ist das Dreieck, zweideutig bestimmt.

Es läßt sich auch durch Herstellung der Neigungswinkel mittelst kongruenter Dreiecke beweisen, daß, wenn zwei körperliche Dreiecke nach einem dieser Fälle übereinstimmen, sie auch in den übrigen Elementen übeinstimmen müssen.

4) Aus jedem dieser drei Bestimmungsfälle läßt sich mit Hülfe des reziproken Dreiecks ein weiterer Bestimmungsfall ableiten. Z. B. Aus dem ersten Fall ergiebt sich, daß ein körperliches oder sphärisches Dreieck bestimmt ist

durch die drei Winkel α, β, γ. Es sind nämlich damit bestimmt die Seiten des reziproken Dreiecks, folglich auch die Winkel des reziproken Dreiecks und damit die Seiten des ersten Dreiecks.

Satz. *Ein körperliches oder sphärisches Drei-* **(39)**
eck ist bestimmt:
1) durch die drei Seiten;
2) durch zwei Seiten und ihren Zwischenwinkel;
3) durch zwei Seiten und einen Gegenwinkel (eindeutig, zweideutig);
4) durch zwei Winkel und eine Gegenseite (eindeutig, zweideutig);
5) durch zwei Winkel und die Zwischenseite;
6) durch die drei Winkel.

Stimmen zwei körperliche oder sphärische Dreiecke nach einem dieser Fälle überein, so sind sie bei derselben Aufeinanderfolge der entsprechenden Elemente kongruent, bei entgegengesetzter Aufeinanderfolge symmetrisch.

§ 68. Konstruktion eines körperlichen oder sphärischen Dreiecks.

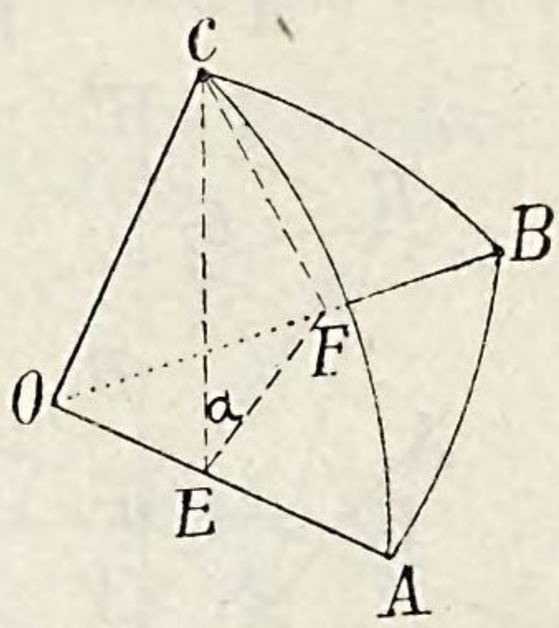
1) Aus den drei Seiten.

Erste Lösung. (Fig. a). Fälle $CE \perp OA$ in der Ebene AOC und $EF \perp OA$ in der Ebene AOB, so sind da $\overline{OC}$ beliebig genommen werden kann, in $\triangle$ CEF die drei Seiten bekannt und damit erhält man $\sphericalangle CEF = \alpha$.

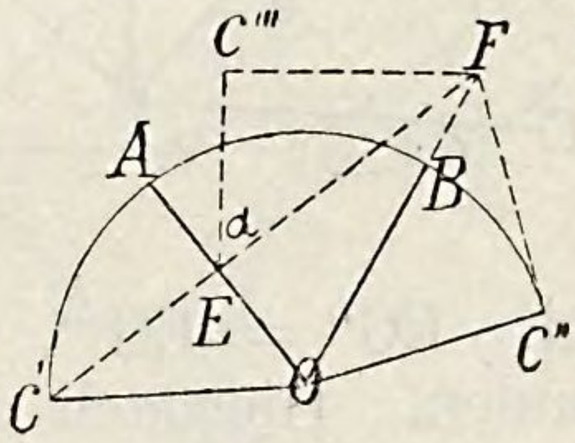
Ebenso erhält man die andern Winkel des Dreiecks.

Die Ausführung für α zeigt Figur b. $C'E \perp OA$ verlängert bis zum Schnitt mit $\overline{OB}$ in F. Aus EF, C'E und C''F konstruiert man $\triangle$ EFC''' und es ist $\sphericalangle C'''EF = \alpha$.

a)

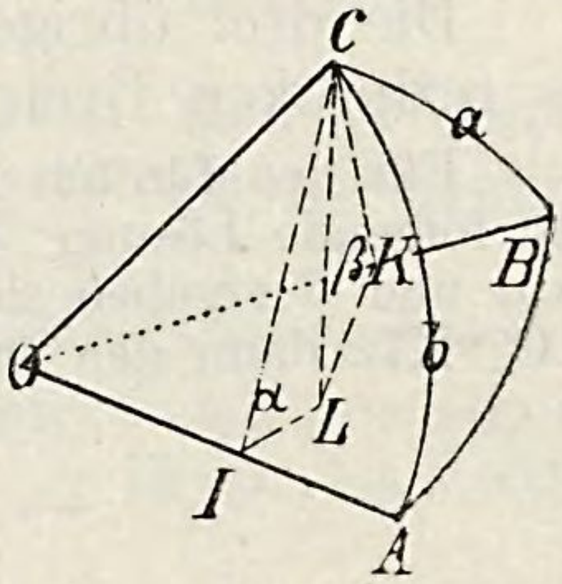


b)



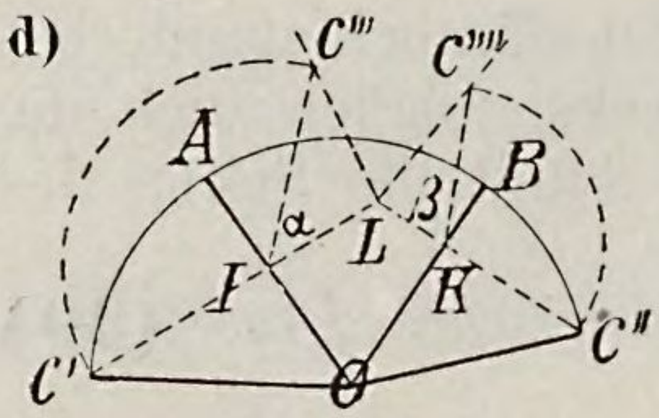
Zweite Lösung. (Fig. c). Fälle $CL \perp$ Ebene AOB, $CI \perp OA$ in Ebene AOC, $CK \perp OB$ in Ebene BOC, so ist $\sphericalangle CIL = \alpha$, $\sphericalangle CKL = \beta$. Da CI und CK bekannt sind, ebenso IL und KL, lassen sich aus den rechtwinkligen Dreiecken CIL und CKL die Winkel α und β konstruieren.

c)



Ausführung nach Fig. d. Man

d)



ziehe C'I ⊥ OA und C''K ⊥ OB bis sie sich schneiden in L. Konstruiere die rechtwinkligen Dreiecke C'''IL und C''''KL (C'''I = C'I und C''''K = C''K) so ist ∢ C'''IL = α, ∢ C''''KL = β.

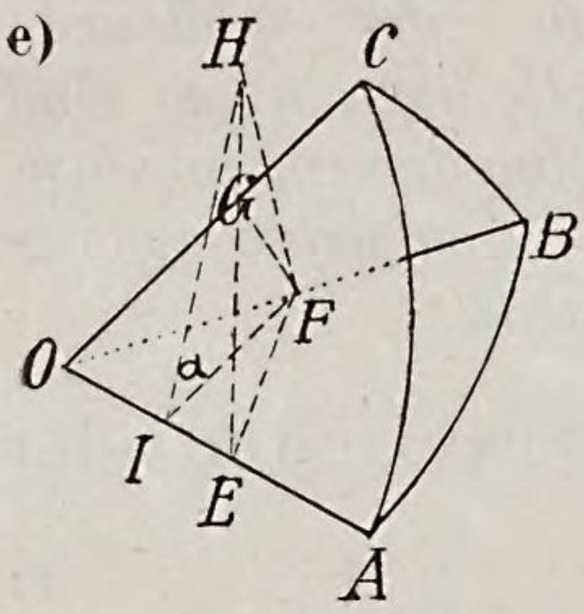
Zur Probe muß LC''' = LC''''.

2) Aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel.

Erste Lösung. (Fig. b). C'E ⊥ OA verlängert bis zum Schnitt mit OB in F; ∢ FEC''' = α, EC''' = C'E, FC'' = FC''', OC'' = OC', so hat man die Seite ∢ BOC'' = a.

Zweite Lösung. (Fig. d). C'I ⊥ OA, ∢ LIC''' = α, IC''' = IC', C'''L ⊥ C'I, LK ⊥ OB verlängert bis OC'' = OC', so hat man die Seite ∢ BOC'' = a.

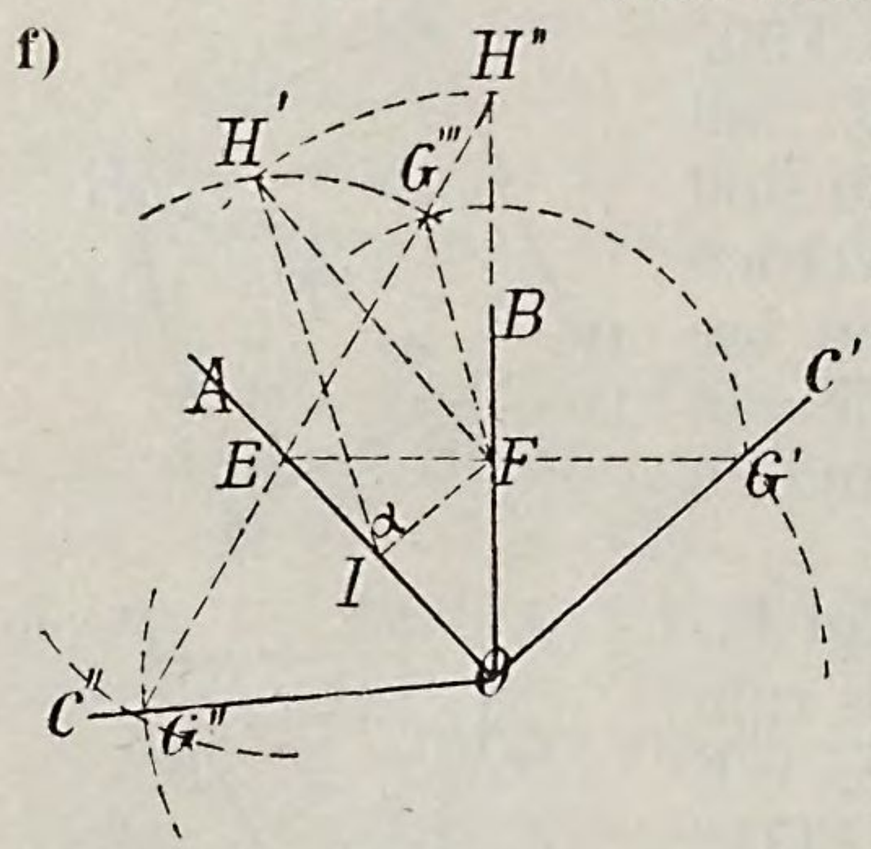
e)



3) Aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel. (Fig. e). Gegeben ∢ AOB = c, ∢ BOC = a, ⋀ OA = α.

Man denke sich Ebene EFG ⊥ OB, so ist EF und FG bekannt, da OF beliebig. Ferner ist ∢ FEG herzustellen, wenn man sich Ebene FIH ⊥ OA denkt, und FH als Kante der Ebenen EFG und FIH nimmt; es ist dann ∢ FIH = α (gegeben), damit das rechtwinklige Dreieck FIH und hieraus das rechtwinklige Dreieck HFE konstruierbar, womit ∢ FEH gefunden ist.

f)



Ausführung (Fig. f). ∢ AOB = c, ∢ BOC' = a, OF beliebig. FE ⊥ OB, FG' ⊥ OB, FI ⊥ OA, ∢ FIH' = α, FH' ⊥ FI, FH'' ⊥ EF und FH'' = FH'. Kreis um F mit dem Radius FG', welcher EH'' in G''' schneidet. EG'' = EG''', OG'' = OG', so ist ∢ AOC'' = b gefunden. Hiernach das übrige.

Die drei übrigen Bestimmungsfälle lassen sich mittelst des reziproken Dreiecks auf die drei ersten zurückführen.

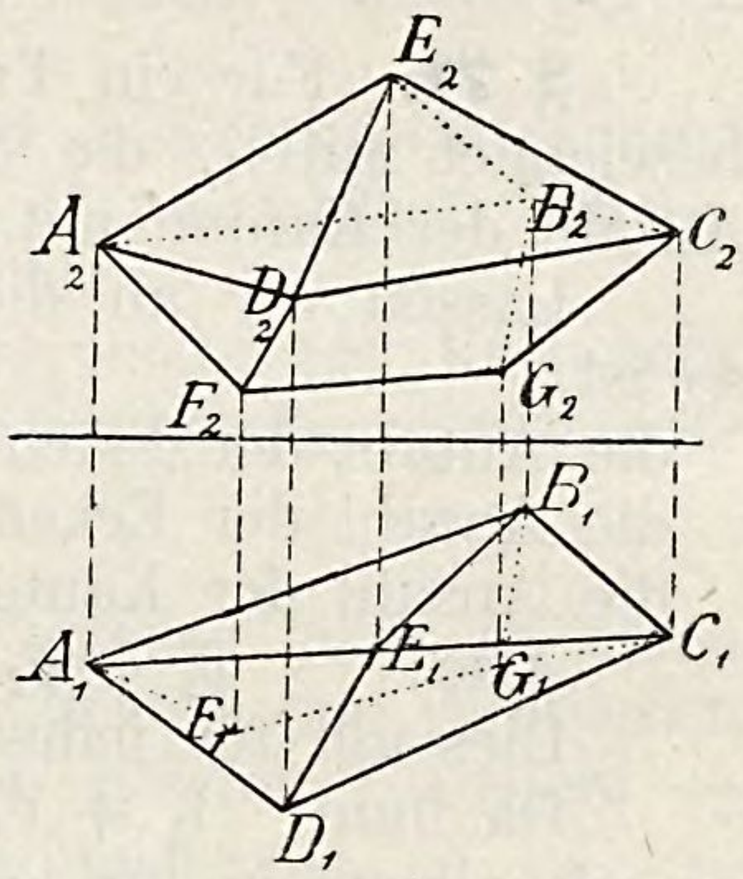
Für den fünften Fall (gegeben c, α, β) hat man nach Fig. d auch folgende Lösung; ∢ C'''LC'''' = c, LC''' = LC''''; hieraus und aus α und β ergeben sich die rechtwinkligen Dreiecke △ C'''IL und △ C''''KL, dann der Scheitel O und damit das übrige.

Zweiter Abschnitt. — Geschlossene Gebilde.

VIII. Polyeder.

§ 69. Ein von lauter Ebenen begrenzter Körper heißt ein eckiger Körper oder ein Polyeder.

Grundriß und Aufriß eines Polyeders ergeben sich, wenn man die Risse seiner Ecken herstellt.

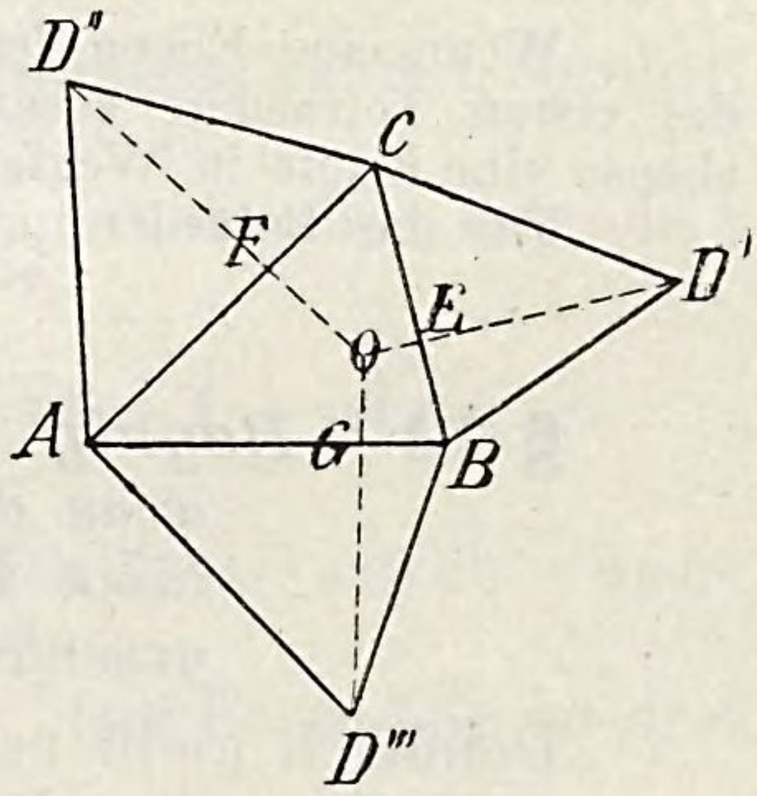


Nebenstehend sind dargestellt Grundriß und Aufriß eines Polyeders von 7 Ecken (A, B, C, D, E, F, G), 8 Begrenzungsflächen (△ ABE, △ BCE, △ CDE, △ DAE, △ ADF, △ BCG, Viereck ABFG und Viereck CDFG). Derselbe hat 13 Kanten (AB, BC, CD, DA; — AE, BE, CE, DE; — AF, DF, BG, CG, und FG).

Bei der Zeichnung der Risse werden die Risse der unsichtbaren Kanten punktiert. Zur Bestimmung der Sichtbarkeit denkt man sich das Auge in unendliche Ferne und zwar für den Grundriß oben, für den Aufriß vorne.

Die sämtlichen Begrenzungsflächen eines Polyeders in eine Ebene ausgebreitet bilden dessen Netz.

§ 70. Das einfachste Polyeder ist das Tetraeder. Dasselbe wird von vier Ebenen begrenzt. Die Begrenzungsfiguren sind Dreiecke, wovon eines als Grundfläche gelten kann. Das Tetraeder hat sechs Kanten und vier Ecken.



Nebenstehend das Netz eines Tetraeders. Es muß AD'' = AD''', BD''' = BD', CD' = CD''. Die von D', D'', D''', auf die Seiten BC, CA, AB gefällten Lote, D'E, D''F, D'''G müssen sich in einem Punkt O schneiden, dem Riß der Spitze D auf die Grundflächenebene ABC.

Die von D auf die Ebene ABC gefällte Senkrechte DO ist die Höhe des Tetraeders; dieselbe ergiebt sich aus einem der rechtwinkligen Dreiecke △ AOD, △ BOD, △ COD.

Dieselben Dreiecke ergeben auch die Neigungswinkel der Seitenkanten AD, BD, CD gegen die Grundfläche ABC.

Die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche ergeben sich aus den rechtwinkligen Dreiecken $\triangle$ DOE, $\triangle$ DOF, $\triangle$ DOG.

Zur Bestimmung eines Tetraeders sind sechs Elemente notwendig. Die Konstruktion des Netzes nach diesen Fällen ist mittelst der obigen Angaben leicht auszuführen.

§ 71. Für ein Tetraeder sei die Anzahl der Flächen bezeichnet mit f_1, die Anzahl der Ecken mit e_1 und die Anzahl der Kanten mit k_1.

Lassen wir an dieses ein zweites Tetraeder stoßen, so ist:

die Anzahl der Flächen: $f_2 = f_1 + 4 - 2 = f_1 + 2$,
die Anzahl der Ecken: $e_2 = e_1 + 4 - 3 = e_1 + 1$,
die Anzahl der Kanten: $k_2 = k_1 + 6 - 3 = k_1 + 3$.

Also: $f_2 + e_2 - k_2 = f_1 + e_1 - k_1$.

Dies gilt für jedes weiter anstoßende Tetraeder.

Da nun: $f_1 + e_1 - k_1 = 4 + 4 - 6 = 2$,

so gilt allgemein für jedes Polyeder:

$$\mathbf{f + e - k = 2.}$$

Satz. *Für jedes Polyeder ist die Summe der Anzahl der Flächen und Ecken vermindert um die Anzahl der Kanten gleich zwei. (Eulerscher Satz).* **(40)**

Wenn eine Ebene des angestoßenen Tetraeders mit einer Ebene des ersten Tetraeders zusammenfällt, so kommt eine Ebene und ebenso eine Kante in Wegfall, und die Differenz $f + e - k$ ist dieselbe.

Für das Polyeder in Figur § 69 ist $f = 8$, $e = 7$, $k = 13$.

$$8 + 7 - 13 = 2.$$

§ 72. ***Begriff.*** *Ein Polyeder heißt regulär, wenn dasselbe von lauter kongruenten regulären Figuren begrenzt wird, welche in kongruenten Körperecken zusammenstoßen.* **(41)**

Demnach giebt es folgende reguläre Polyeder:

1) Drei reguläre Dreiecke bilden ein Körpereck (Summe der Seiten $60^0 \cdot 3 = 180^0 < 360^0$) — reguläres Tetraeder. $f = 4$. $e = 4$. $k = 6$.

2) Vier reguläre Dreiecke bilden ein Körpereck (Summe der Seiten $60^0 \cdot 4 = 240^0 < 360^0$) — reguläres Oktaeder. $f = 8$. $e = 6$. $k = 12$.

3) Fünf reguläre Dreiecke bilden ein Körpereck (Summe

der Seiten $60^0 \cdot 5 = 300^0 < 360^0$) — reguläres Ikosaeder. f = 20. e = 12. k = 30.

Sechs reguläre Dreiecke können nicht ein Körpereck bilden, weil die Summe der Seiten $60^0 \cdot 6 = 360^0$ betragen würde. (Satz **37**).

4) Drei reguläre Vierecke bilden ein Körpereck (Summe der Seiten $90^0 \cdot 3 = 270^0 < 360^0$) — reguläres Hexaeder. f = 6. e = 8. k = 12. (Würfel, Kubus).

Vier reguläre Vierecke können nicht ein Körpereck bilden, weil $90^0 \cdot 4 = 360^0$.

5) Drei reguläre Fünfecke bilden ein Körpereck (Summe der Seiten $108^0 \cdot 3 = 324^0 < 360^0$) — reguläres Dodekaeder. f = 12. e = 20. k = 30.

Vier reguläre Fünfecke können nicht ein Körpereck bilden. Ebensowenig drei reguläre Sechsecke, Siebenecke u. s. w.

§ 73. In jedem regulären Polyeder giebt es einen Punkt, welcher von den sämtlichen Ecken, den sämtlichen Flächen, und den sämtlichen Kanten gleichweit absteht — Mittelpunkt des regulären Polyeders.

Vom Mittelpunkt eines regulären Polyeders aus kann man beschreiben:

1) eine Kugelfläche, welche durch sämtliche Ecken geht (Eckradius x);

2) eine Kugelfläche, welche sämtliche Flächen berührt (Flächenradius y);

3) eine Kugelfläche, welche sämtliche Kanten berührt. (Kantenradius z).

Eckradius einer Seitenfläche r, Seitenradius derselben r', Kante a.

$$y^2 + r^2 = x^2. \quad y^2 + r'^2 = z^2. \quad z^2 + \left(\frac{1}{2} a\right)^2 = x^2.$$

§ 74. Bestimmung der Radien eines regulären Polyeders aus der Kante a.

1) Reguläres Tetraeder. Der Eckradius ist drei Viertel der Höhe des Tetraeders.

$$x = \frac{1}{4} a \sqrt{6}. \qquad y = \frac{1}{12} a \sqrt{6}. \qquad z = \frac{1}{4} a \sqrt{2}.$$

2) Reguläres Oktaeder. Der Eckradius ist die Halbdiagonale des Quadrats über der Kante.

$$x = \frac{1}{2} a \sqrt{2}. \qquad y = \frac{1}{6} a \sqrt{6}. \qquad z = \frac{1}{2} a.$$

3) Reguläres Ikosaeder. Der Kantenradius ist der Eckradius eines regulären Zehnecks, dessen Seite die halbe Ikosaederkante ist. Hieraus z, dann x und y.

$$x = \frac{1}{4} a \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}. \qquad y = \frac{1}{12} a (3\sqrt{3} + \sqrt{15}).$$

$$z = \frac{1}{4} a (1 + \sqrt{5}).$$

4) Reguläres Hexaeder. Der Eckradius ist die halbe Würfeldiagonale:

$$x = \frac{1}{2} a \sqrt{3}. \qquad y = \frac{1}{2} a. \qquad z = \frac{1}{2} a \sqrt{2}.$$

5) Reguläres Dodekaeder. Der Kantenradius ist der Eckradius eines regulären Zehnecks, dessen Seite die Verbindungslinie der Mitten zweier benachbarten Dodekaederkanten ist. Letztere aber ist die Seite eines regulären Fünfecks, dessen Eckradius der Seitenradius eines Dodekaeder-Fünfecks ist.

$$x = \frac{1}{4} a (\sqrt{3} + \sqrt{15}). \qquad y = \frac{1}{20} a \sqrt{250 + 110\sqrt{5}}.$$

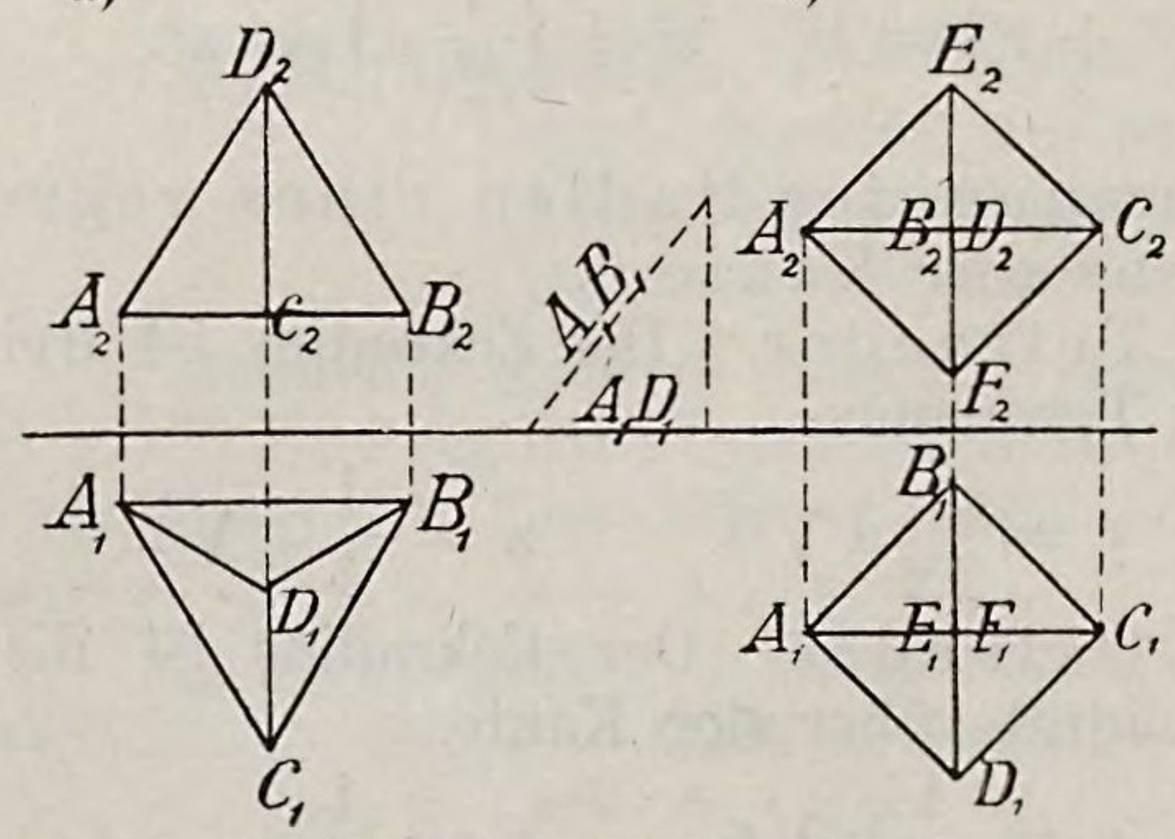
$$z = \frac{1}{4} a (3 + \sqrt{5}).$$

§ 75. Grundriß und Aufriß der regulären Polyeder.

1) Reguläres Tetraeder. ABCD. (Fig. a). Wir nehmen die Ebene ABC parallel zur ersten Tafel und die Kante AB parallel zur Kante.

Der Grundriß des △ ABC ist zu diesem kongruent (△ $A_1B_1C_1$); die Spitze D hat als Grundriß den Mittelpunkt des Dreiecks D_1.

a)



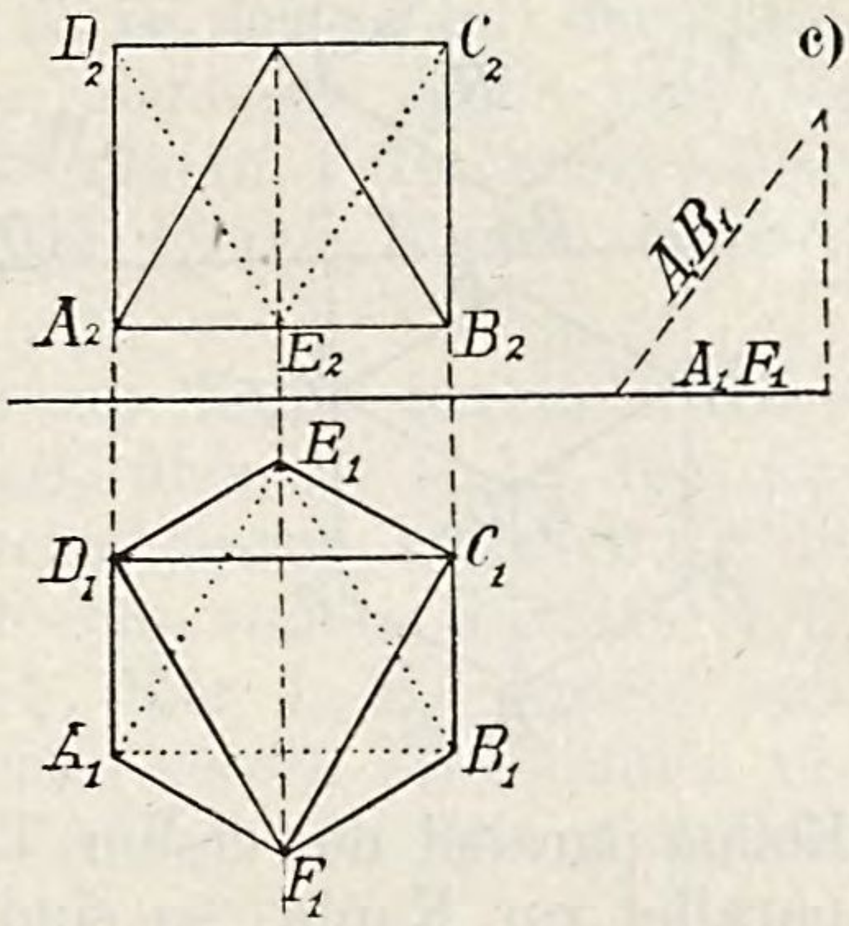
b)

Die Aufrisse A_2, B_2, C_2 liegen auf einer Parallelen zur Kante; der Aufriß D_2 senkrecht über C_2. Die Höhe C_2D_2 ergiebt sich aus einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse gleich der Tetraederkante A_1B_1, und dessen andere Kathete gleich A_1D_1 ist. (Nebenfigur).

2) Reguläres Oktaeder. ABCDEF. a) Ebene ABCD parallel zur ersten Tafel. (Fig. b).

Die Grundrisse $A_1B_1C_1D_1$ bilden ein Quadrat; die Risse E_1 und F_1 sind dessen Mitte. — Der Aufriß ist dieselbe Figur.

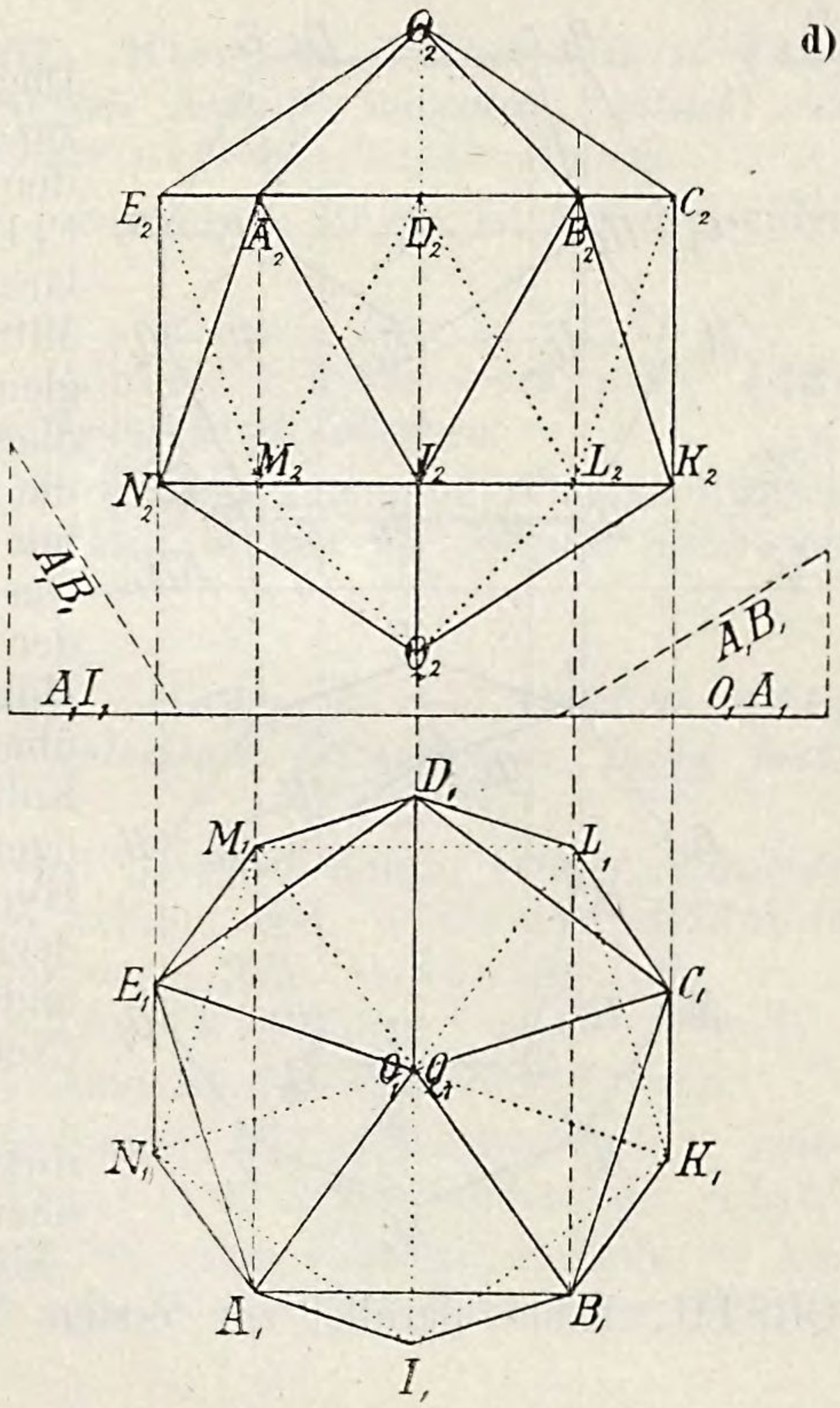
b) Nimmt man eine Ebene des Oktaeders z. B. △ ABE (Fig. c) parallel zur ersten Tafel, so ist der Grundriß ein reguläres Sechseck. Der Aufriß ist ein Rechteck; dessen Höhe ergiebt sich aus einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse gleich der Oktaederkante A_1B_1 und dessen andere Kathete gleich A_1F_1 ist. (Nebenfigur).



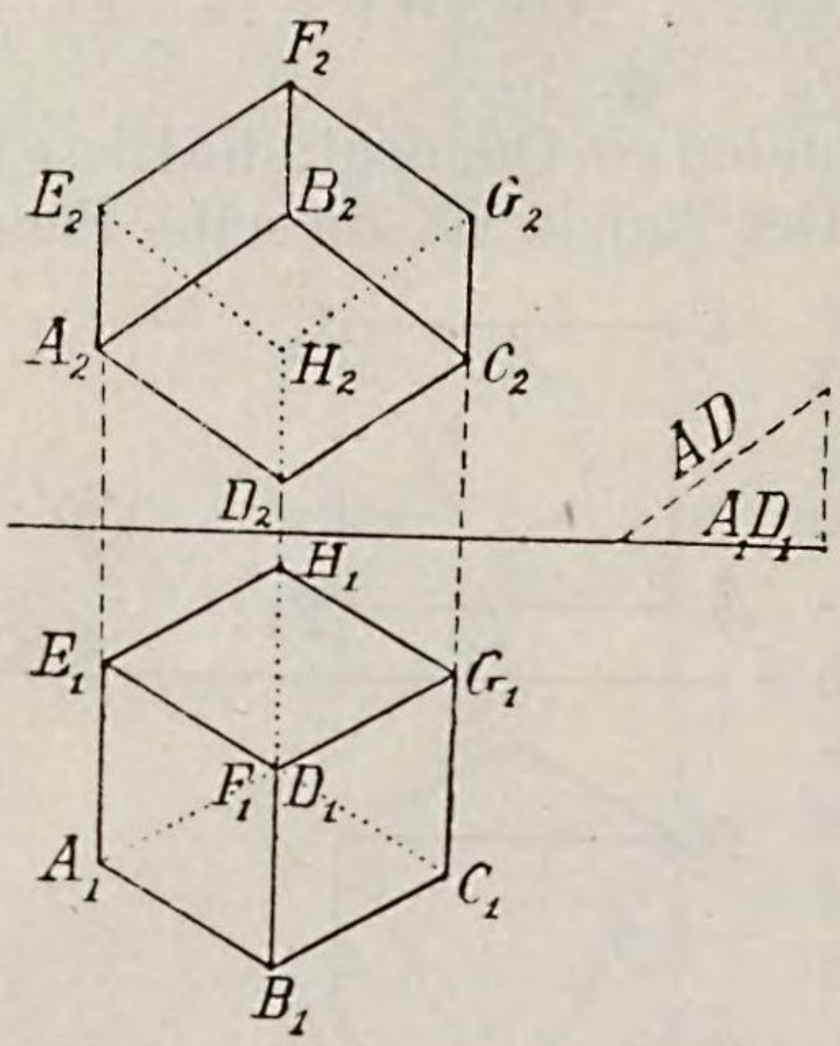
3) Reguläres Ikosaeder. (Fig d). Die obere Spitze heiße O, die untere Q, die fünf der oberen Spitze benachbarten Ecken heißen A, B, C, D, E; die fünf der untern Ecke benachbarten I, K, L, M, N. Die Ebenen der letzteren Ecken werden parallel genommen zur ersten Tafel.

Die Grundrisse $A_1B_1C_1D_1E_1I_1K_1L_1M_1N_1$ bilden ein reguläres Zehneck; die Grundrisse O_1 und Q_1 fallen in die Mitte desselben.

Die Aufrisse der fünf untern und ebenso der fünf obern Ecken fallen in je eine Parallele zur Kante. Der Abstand dieser Parallelen ergiebt sich aus einem rechtwinkligen Drei-



e)



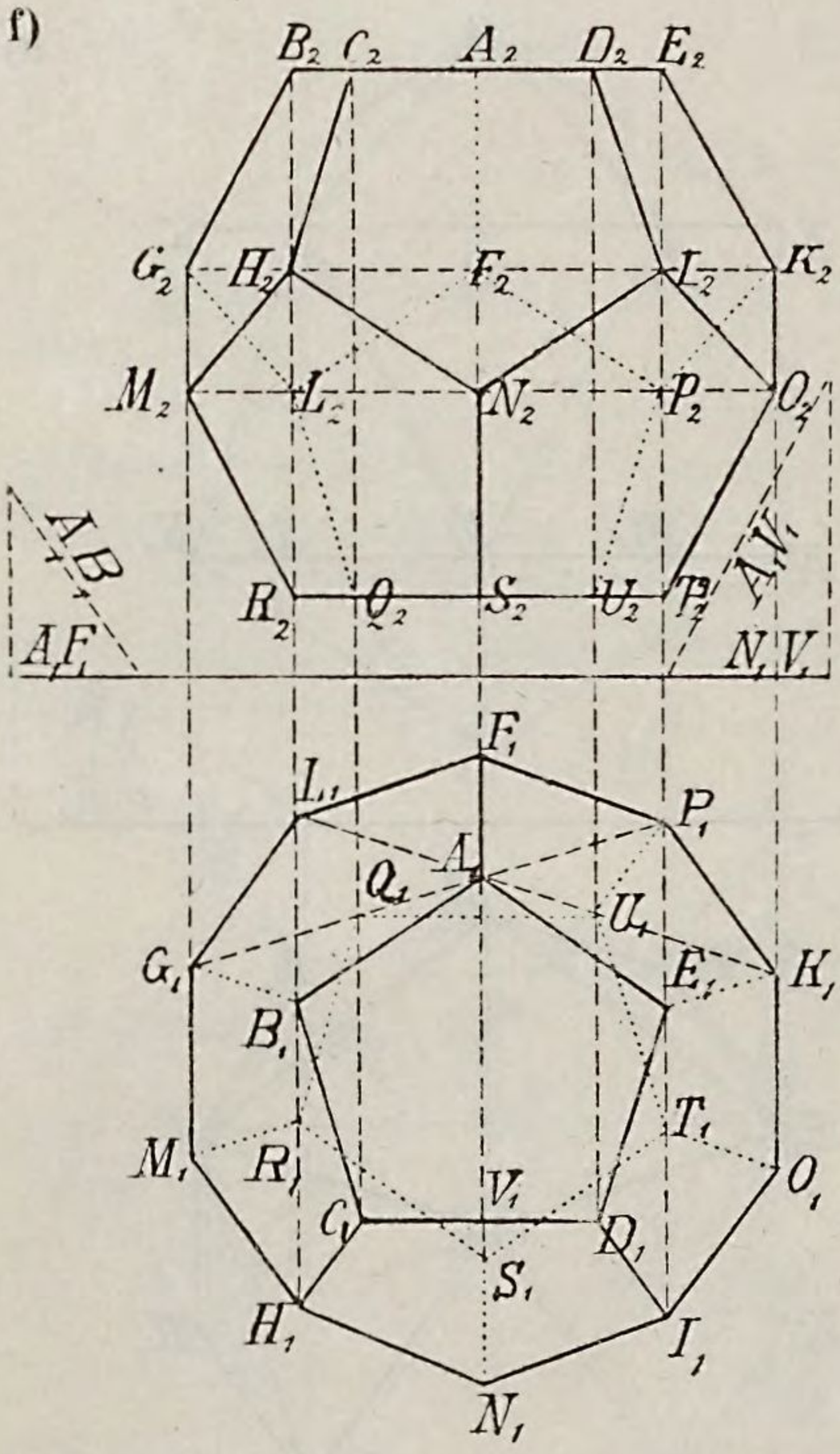
eck, dessen Hypotenuse die Ikosaederkante (A_1 B_1), und dessen eine Kathete A_1 I_1 ist. Die Höhe des Aufrisses O_2 über A_2B_2 ergiebt sich aus einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse die Ikosaederkante (A_1B_1) und dessen eine Kathete O_1A_1 ist. Ebenso ergiebt sich Q_2.

Es muſs $D_2I_2 = O_1A_1$ und $O_2D_2 = A_1I_1$; vergl. Plan. § 253, Anmerkung.

4) Reguläres Hexaeder.

a) Nimmt man die eine Ebene parallel der ersten Tafel und die eine Hexaederkante parallel zur Kante, so sind beide Risse Quadrate.

f)



b) Nimmt man die Diagonale DF senkrecht zur ersten Tafel, so bilden die Grundrisse A_1 C_1 H_1 (Fig. e) ein reguläres Dreieck mit der Mitte D_1, dessen Seite gleich einer Seitenflächendiagonale ist. Ebenso die Grundrisse B_1 G_1 E_1, nur um 60^0 verschoben. Der Aufriß D_2F_2 ist gleich der Würfeldiagonale. Die Höhe der Ebene ACH über der Ecke D ist die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Hexaederkante AD und dessen andere Kathete A_1D_1 ist. (Nebenfigur).

5) Reguläres Dodekaeder. (Fig. f). Die obere Grundfläche heiße ABCDE, die untere QRSTU, beide parallel zur ersten Tafel; die fünf der

oberen Grundfläche benachbarten Ecken seien F, G, H, I, K, die fünf der untern Grundfläche benachbarten Ecken L, M, N, O, P.

Die Grundrisse $F_1 G_1 H_1 I_1 K_1 L_1 M_1 N_1 O_1 P_1$ bilden ein reguläres Zehneck. Der Grundriß A_1 ist der Schnitt der Zehnecksdiagonalen $L K_1$ und $G_1 P_1$; denn es liegen die vier Ecken L, A, U, K in einer zur ersten Tafel senkrechten Ebene und ebenso die Ecken P, A, Q, G. Ebenso ergeben sich die übrigen Grundrisse.

Die Aufrisse liegen in vier zur Kante parallelen Graden. Die Höhe der Graden $A_2 B_2$ über $F_2 G_2$ ist die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Dodekaederkante $(A_1 B_1)$ und dessen andere Kathete $A_1 F_1$ ist. Die Höhe der Graden $A_2 B_2$ über $L_2 M_2$ ergiebt sich aus einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse die Höhe eines Dodekaederfünfecks $(A_1 V_1)$ und dessen andere Kathete $V_1 N_1$ ist.

§ 76. *Begriff.* *Wenn sich n Ebenen in n parallelen Kanten schneiden, entsteht ein n seitiger prismatischer Raum.* **(42)**

Der einfachste prismatische Raum ist der dreiseitige prismatische Raum.

§ 77. *Satz.* *Parallele Schnitte eines prismatischen Raums sind kongruent.* **(43)**

Denn: sie stimmen in allen Seiten und Winkeln überein.

Der zu den Kanten senkrechte Schnitt heißt der Querschnitt.

§ 78. *Begriff.* *Ein durch zwei parallele Schnitte geschlossener prismatischer Raum heißt Prisma.* **(44)**

Eine Prisma wird begrenzt durch zwei kongruente n Ecke, deren Ebenen parallel sind, — die Grundflächen — und n Parallelogramme — die Seitenflächen.

$f = n + 2. \quad e = 2n. \quad k = 3n. \quad f + e - k = 2.$

Das einfachste Prisma ist das dreiseitige Prisma.

Stehen die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht, so heißt das Prima senkrecht, andernfalls schief.

Grundriß und Aufriß eines Prismas einfach. — Aus Grundriß und Aufriß ergiebt sich das Netz eines Prismas.

§ 79. *1)* ***Begriff.*** *Ein Prisma, in welchem auch die Grundflächen Parallelogramme sind, heißt Parallelepiped.* **(45)**

2) Ein Parallelepiped wird begrenzt von sechs Parallelogrammen; je zwei gegenüberliegende sind parallel und kongruent und können daher als Grundflächen angesehen werden.

3) Ein senkrechtes Parallelepiped mit rechteckiger Grundfläche heißt Quader; derselbe wird begrenzt von sechs Rechtecken. Die in einer Ecke zusammenstossenden Kanten heißen die Dimensionen des Quaders (Länge, Breite, Höhe). — Ein Quader, dessen drei Dimensionen gleich sind, heißt Würfel, Kubus (reguläres Hexaeder).

4) Die schiefen Parallelepipede sind zu unterscheiden als:

a) einfach schiefe Parallelepipede, wenn ein Paar gegenüberliegender Seitenflächen zu den Grundflächen senkrecht steht,

b) doppelt schiefe Parallelepipede, wenn beide Paare gegenüberliegender Seitenflächen zu den Grundflächen schief stehen.

§ 80. ***Begriff.*** *Wenn n Ebenen sich in n Kanten derart schneiden, daß die Kanten alle durch einen Punkt gehen, entsteht ein n seitiger pyramidalischer Raum.* **(46)**

Der Punkt, in welchem sich die Kanten schneiden, heißt die Spitze.

Der pyramidalische Raum ist eigentlich von der Spitze aus nach zwei Seiten unendlich ausgedehnt; doch denkt man sich denselben meistens in der Spitze abgeschlossen. In dieser Form ist dann der pyramidalische Raum dasselbe wie ein körperliches n Eck.

Der einfachste pyramidalische Raum ist ein dreiseitiger pyramidalischer Raum.

§ 81. ***Satz.*** *Parallele Schnitte eines pyramidalischen Raums sind ähnlich und verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.* **(47)**

Denn: sie stimmen im Verhältnis ihrer Seiten und in den Winkeln überein.

§ 82. ***Begriff.*** *Ein durch eine Ebene geschlossener pyramidalischer Raum heißt Pyramide.* **(48)**

Eine Pyramide wird begrenzt durch ein n Eck — Grundfläche — und n Dreiecke — Seitenflächen.

$f = n + 1$. $e = n + 1$. $k = 2n$. $f + e - k = 2$.

Die einfachste Pyramide ist die dreiseitige Pyramide (Tetraeder). Dieselbe wird von vier Dreiecken begrenzt, von denen jedes als Grundfläche angesehen werden kann.

Grundriß und Aufriß einer Pyramide einfach. — Aus Grundriß und Aufriß ergiebt sich das Netz.

§ 83. Reguläre Pyramide nennt man eine solche, deren Grundfläche eine reguläre Figur, und deren Seitenflächen kongruente gleichschenklige Dreiecke sind. Ein Lot von der Spitze auf die Grundfläche (Höhe) trifft dieselbe in ihrem Mittelpunkt.

Eckradius der Grundfläche r, Seitenradius r', Grundkante a, Höhe h, Seitenkante s und Seitenflächenhöhe h'.

$$s^2 = r^2 + h^2. \quad h'^2 = r'^2 + h^2. \quad s^2 = h'^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2.$$

§ 84. Der zwischen zwei parallelen Schnitten eines pyramidalischen Raumes liegende Körper heißt abgestumpfte Pyramide oder Pyramidenstumpf. Derselbe wird begrenzt von zwei ähnlichen n Ecken, deren Ebenen parallel sind, als Grundflächen, und von n Trapezen als Seitenflächen. Die Seitenkanten laufen verlängert alle in einem Punkte zusammen.

Für einen regulären Pyramidenstumpf seien die Grundkanten a_1 und a_2, die Eckradien r_1 und r_2, die Seitenradien r'_1 und r'_2, so ist

$$s^2 = (r_1 - r_2)^2 + h^2. \qquad h'^2 = (r'_1 - r'_2)^2 + h^2.$$

$$s^2 = h'^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2\right)^2.$$

§ 85. Polyeder, welche in allen Elementen übereinstimmen, heißen

a) kongruent, wenn die Aufeinanderfolge der übereinstimmenden Elemente dieselbe ist,

b) symmetrisch, wenn die Aufeinanderfolge entgegengesetzt ist.

Kongruente Körper müßen bei entsprechender Ineinanderlage sich decken.

Symmetrische Körper mit zwei entsprechenden Flächen zusammengelegt, liegen derart, daß die Ebene dieser Flächen Mittellotebene zu den Verbindungsstrecken aller entsprechenden Ecken ist.

Stimmen zwei Polyeder überein im Verhältnis der Kanten, sowie in den Winkeln der Begrenzungsflächen, so heißen dieselben ähnlich.

IX. Inhalt der Polyeder.

§ 86. Einheit für die Bestimmung des Rauminhalts ist ein Würfel von einem Meter Kante, genannt Meterwürfel oder gewöhnlich Kubikmeter auch Ster (1 *cbm*).

1 *cbm* = 1000 Kubikdecimeter oder Liter (1000 *l*),
1 *l* = 1000 Kubikcentimeter (1000 *ccm*),
1 *ccm* = 1000 Kubikmillimeter (1000 *cmm*),
100 *l* = 1 Hektoliter (1 *hl*).

Gewicht von 1 *ccm* Wasser : ein Gramm (1 *g*),
„ „ 1 *l* „ : 1000 *g* = ein Kilogramm (1 *kg*)
„ „ 1 *cbm* „ : 1000 *kg* = eine Tonne (1 *t*).

Die Zahl, welche angiebt, wieviel Gramm das Kubikcentimeter eines Stoffes wiegt, heißt die spezifische Gewichtszahl dieses Stoffes oder das spezifische Gewicht.

Der Inhalt multipliziert mit dem spezifischen Gewicht giebt das Gewicht eines Körpers — und zwar in Gramm, Kilogramm oder Tonnen, je nachdem der Inhalt in Kubikcentimeter, Liter oder Kubikmeter angegeben ist.

Spezifische Gewichte.

Korkholz	0,24	Marmor	2,84	Gold	19,26
Fichtenholz	0,54	Glas	2,89	Platin	21,70
Buchenholz	0,72	Zinn	7,29		
Eichenholz	0,76	Gußeisen	7,21	Weingeist	0,79
Eis	0,92	Schmiedeisen	7,79	Terpentinöl	0,87
Wachs	0,97	Nickel	8,28	Meerwasser	1,03
Elfenbein	1,91	Messing	8,41	Schwefelsäure	1,84
Sandstein	2,43	Kupfer	8,85	Quecksilber	13,59
Aluminium	2,56	Silber	10,47	Luft	0,0013
Granit	2,69	Blei	11,35	Leuchtgas	0,0004

§ 87. Ein Quader habe die Länge a (z. B. 6 *cm*), die Breite b (z. B. 5 *cm*) und die Höhe c (z. B. 4 *cm*), so ist die Anzahl der Raumeinheiten a b c (120 *ccm*).

Quader = a b c. **(49)**

Satz. *Der Inhalt eines Quaders ist gleich dem Produkt seiner drei Dimensionen.*

Wenn a, b, c gebrochene Zahlen sind, gilt der Satz ebenso; nicht minder wenn dieselben irrationale Zahlen sind, da Irrationalzahlen sich mit beliebiger Annäherung durch Rationalzahlen ausdrücken lassen. (Alg. § 79).

§ 88. Für den Würfel ergiebt sich, wenn die Kante mit a bezeichnet wird,

$$\textbf{Würfel} = a^3 \qquad \textbf{(50)}$$

Satz. *Der Inhalt eines Würfels ist gleich der dritten Potenz seiner Kante.*

§ 89. 1) Senkrechtes Parallelepiped mit schiefer Grundfläche. Man verwandle die Grundfläche (G) in ein Rechteck (a · b) — drei Lagen wie in Plan. § 151 — und errichte darüber einen Quader von gleicher Höhe mit dem Parallelepiped (h), so ist

$$\text{Parallelepiped} = \text{Quader}.$$

Denn: der Quader schneidet auf der einen Seite ein dreiseitiges Prisma weg und setzt ein demselben kongruentes dreiseitiges Prisma zu (drei Lagen). Also:

$$\text{Parallelepiped} = \text{Quader} = a \cdot b \cdot h = G \cdot h.$$

2) Schiefes Parallelepiped. Nach demselben Gedankengang verwandelt sich das senkrechte Parallelepiped zunächst in ein einfach schiefes und dieses dann in ein doppelt schiefes Parallelepiped. Daher allgemein

$$\text{Parallelepiped} = G \cdot h.$$

§ 90. 1) Dreiseitiges Prisma. Grundfläche G, Höhe h. Dasselbe läßt sich zu einem Parallelepiped vervollständigen, welches doppelt so groß ist als das Prisma. Daher:

$$\text{Prisma} = \frac{1}{2}\,\text{Parallelepiped} = \frac{1}{2} \cdot 2\,G \cdot h = G \cdot h.$$

Ein senkrechtes Parallelepiped zerfällt durch eine Diagonalebene in zwei kongruente dreiseitige Prismen, welche folglich auch gleich sind.

Beim schiefen Parallelepiped sind die entstandenen Prismen symmetrisch. Will man dieselben nicht ohne weiteres als gleich gelten lassen, so läßt sich die Gleichheit darthun, wenn man das schiefe Parallelepiped in ein senkrechtes verwandelt, indem man zwei Querschnitte führt, deren Abstand gleich der Seitenkante des Parallelepipeds ist.

2) Prisma überhaupt. Da sich jedes Prisma in dreiseitige Prismen zerlegen läßt, gilt allgemein:

Prisma = G · h. **(51)**

Satz. *Der Inhalt eines Prisma ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe.*

§ 91. Inhalt einer Pyramide. Hiezu sind vorauszuschicken folgende Sätze:

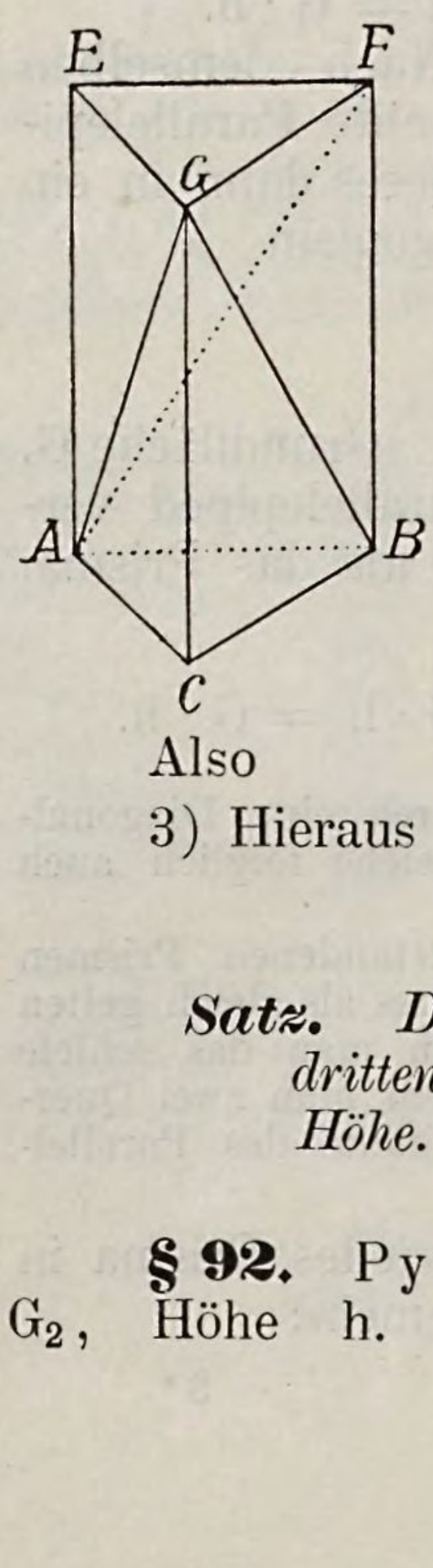
1) Pyramiden mit gleichen Grundflächen und Höhen sind gleich.

Beweis. Man teile die beiden Höhen in n gleiche Teile und lege durch die Teilpunkte Schnitte parallel zu den Grundflächen, so sind die gleich hoch liegenden Schnittflächen gleich. (Satz **47**).

Errichtet man dann über jeder Schnittfläche ein Prisma bis zur nächsten, so sind auch die gleich hoch liegenden Prismen gleich.

Folglich sind auch die entstandenen treppenförmigen Körper gleich. Mit wachsendem n nähern sich aber diese Treppen den Pyramiden, also sind auch diese selbst gleich.

2) Ein dreiseitiges Prisma läßt sich in drei gleiche dreiseitige Pyramiden zerlegen.



Erster Schnitt: ABG. Man erhält
a) die dreiseitige Pyramide ABCG (P_1) und
b) die vierseitige Pyramide ABFEG.

Zweiter Schnitt: AFG. Es zerfällt damit die vierseitige Pyramide in
α) die dreiseitige Pyramide AEFG (P_2) und
β) die dreiseitige Pyramide ABFG (P_3).

Es ist nunmehr:
$P_2 = P_3$ (Grundflächen: $\triangle$ AEF $\cong$ $\triangle$ ABF, Höhe gemeinsam)
$P_1 = P_2$ (Grundflächen: $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ EFG, die Höhen sind gleich der Höhe des Prismas).

Also $P_1 = P_2 = P_3$ w. b.

3) Hieraus folgt

$$\textbf{Pyramide} = \frac{1}{3}\ \textbf{G} \cdot \textbf{h} \qquad \textbf{(52)}$$

Satz. *Der Inhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Teil des Produktes aus Grundfläche und Höhe.*

§ 92. Pyramidenstumpf. Grundflächen G_1 und G_2, Höhe h. Man vervollständige den Pyramiden-

stumpf, und nenne die Höhe der ganzen Pyramide x, die des Aufsatzes y, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I Stumpf} = \frac{1}{3}\cdot[G_1\,x - G_2\,y] \\ \left.\begin{array}{l} \text{II } x - y = h \\ \text{III } x : y = \sqrt{G_1} : \sqrt{G_2} \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

Aus II und III . . $\quad x = h\cdot\frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_1}-\sqrt{G_2}} \qquad y = h\cdot\frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1}-\sqrt{G_2}}$

$$\textbf{Stumpf} = \frac{1}{3}\,h\cdot\left[G_1 + \sqrt{G_1\,G_2} + G_2\right] \qquad \textbf{(53)}$$

Satz. *Der Inhalt eines Pyramidenstumpfs ist gleich der Summe dreier Pyramiden, deren Höhe die Höhe des Stumpfs ist; die Grundflächen sind beziehungsweise die Grundflächen des Stumpfs und das geometrische Mittel der beiden Grundflächen.*

Für den dreiseitigen Pyramidenstumpf läßt sich diese Zerlegung ausführen durch dieselben zwei Schnitte wie in Fig. § 91.

§ 93. Prismen oder Pyramiden verhalten sich

1) überhaupt wie die Produkte aus Grundflächen und Höhen,

2) bei gleichen Grundflächen wie ihre Höhen,

3) bei gleichen Höhen wie ihre Grundflächen.

4) Ähnliche Prismen oder Pyramiden und somit auch ähnliche Körper verhalten sich wie die dritten Potenzen entsprechender Kanten u. s. w.

Man beachte auch in der Stereometrie die Homogenität der Formeln (siehe Plan. § 221). Die Formeln für Rauminhalte müssen von der dritten Dimension, die für Oberflächen oder Teile derselben von der zweiten Dimension sein.

§ 94. Oberfläche der regulären Polyeder. (Kante a).

1) Tetraederoberfläche $= 4\cdot\frac{1}{4}\,a^2\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}.$

2) Oktaederoberfläche $= 8\cdot\frac{1}{4}\,a^2\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}.$

3) Ikosaederoberfläche $= 20\cdot\frac{1}{4}\,a^2\sqrt{3} = 5a^2\sqrt{3}.$

4) Hexaderoberfläche $= 6a^2$.

5) Dodekaederoberfläche $= 12 \cdot \frac{1}{4} a^2 \sqrt{25+10\sqrt{5}}$

$= 3a^2 \sqrt{25+10\sqrt{5}}$.

§ 95. Inhalt der regulären Polyeder. Dieselben sind einer Pyramide gleich, deren Grundfläche die Oberfläche und deren Höhe der Flächenradius (§ 74) ist. Demnach

1) Tetraederinhalt

$$= \frac{1}{3} \cdot a^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{12} a \sqrt{6} = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}.$$

Kann auch als dreiseitige reguläre Pyramide behandelt werden.

2) Oktaederinhalt

$$= \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{6} a \sqrt{6} = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}.$$

Kann auch als vierseitige reguläre Doppelpyramide behandelt werden.

3) Ikosaederinhalt

$$= \frac{1}{3} \cdot 5a^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{12} a \left(3\sqrt{3} + \sqrt{15}\right) = \frac{5}{12} a^3 \left(3 + \sqrt{5}\right).$$

4) Hexaederinhalt $= \frac{1}{3} \cdot 6a^2 \cdot \frac{1}{2} a = a^3$.

Auch unmittelbar aus Satz **50.**

5) Dodekaederinhalt

$$= \frac{1}{3} \cdot 3a^2 \sqrt{25+10\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{20} a \sqrt{250+110\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{4} a^3 \left(15 + 7\sqrt{5}\right).$$

X. Cylinder und Kegel.

§ 96. ***Begriff.*** *Wenn ein Rechteck sich um* **(54)** *eine seiner Seiten, dreht entsteht ein Cylinder (Walze).*

Der Cylinder wird begrenzt von zwei kongruenten Kreisflächen (Grundflächen), deren Ebenen parallel sind, und von einer krummen Fläche, dem Cylindermantel. Letzterer heißt eine einfach gekrümmte Fläche, weil sich auf demselben von einem Punkte aus nach einer Richtung grade Linien ziehen lassen, nämlich parallel der

Seite des Rechtecks, um welche die Drehung erfolgte, der Achse des Cylinders.

Der Radius oder Durchmesser der Grundfläche heißt auch Radius (r) bez. Durchmesser des Cylinders. Der Abstand der Grundflächen ist die Höhe (h). Die auf dem Mantel gezogene Strecke ist die Seite (s).

$$s = h.$$

Der allgemeine Begriff der Cylinderfläche ist folgender: Eine Cylinderfläche entsteht, wenn eine grade Linie sich selbst parallel entlang einer andern (graden oder krummen) Linie gleitet. Die Ebene und ebenso der obige senkrechte Kreiscylinder sind hievon besondere Fälle.

§ 97. 1) Ein zur Grundfläche paralleler Schnitt des Cylinders ist ein den Grundflächen kongruenter Kreis.

2) Ein Achsenschnitt des Cylinders ist ein Rechteck, dessen Seiten der Durchmesser und die Seite des Cylinders sind. — Alle Achsenschnitte eines Cylinders sind kongruent.

§ 98. 1) Cylindermantel. Rollt man denselben in eine Ebene auf, so stellt er sich dar als ein Rechteck, dessen Grundlinie der Cylinderumfang ($2r\pi$) und dessen Höhe die Seite des Cylinders ist.

$$\textbf{Cylindermantel} = \mathbf{2r\pi s.} \qquad \textbf{(55)}$$

2) Cylinderoberfläche $= 2r\pi\ (r + s)$.

§ 99. Cylinderinhalt (Cl); derselbe kann als ein Prisma gelten, dessen Grundfläche eine Kreisfläche ist.

$$\textbf{Cylinder} = \mathbf{r^2\,\pi \cdot h.} \qquad \textbf{(56)}$$

§ 100. ***Begriff.*** *Wenn ein rechtwinkliges* **(57)** *Dreieck sich um eine Kathete dreht, entsteht ein Kegel. (Conus).*

Der Kegel wird begrenzt von einer Kreisfläche, Grundfläche, und einer krummen Fläche, dem Kegelmantel. Dieselbe heißt einfach gekrümmt, weil sich auf derselben von einem Punkte aus nach einer Richtung grade Linien ziehen lassen, nämlich in der Richtung nach der Spitze.

Der Radius oder Durchmesser der Grundfläche heißt

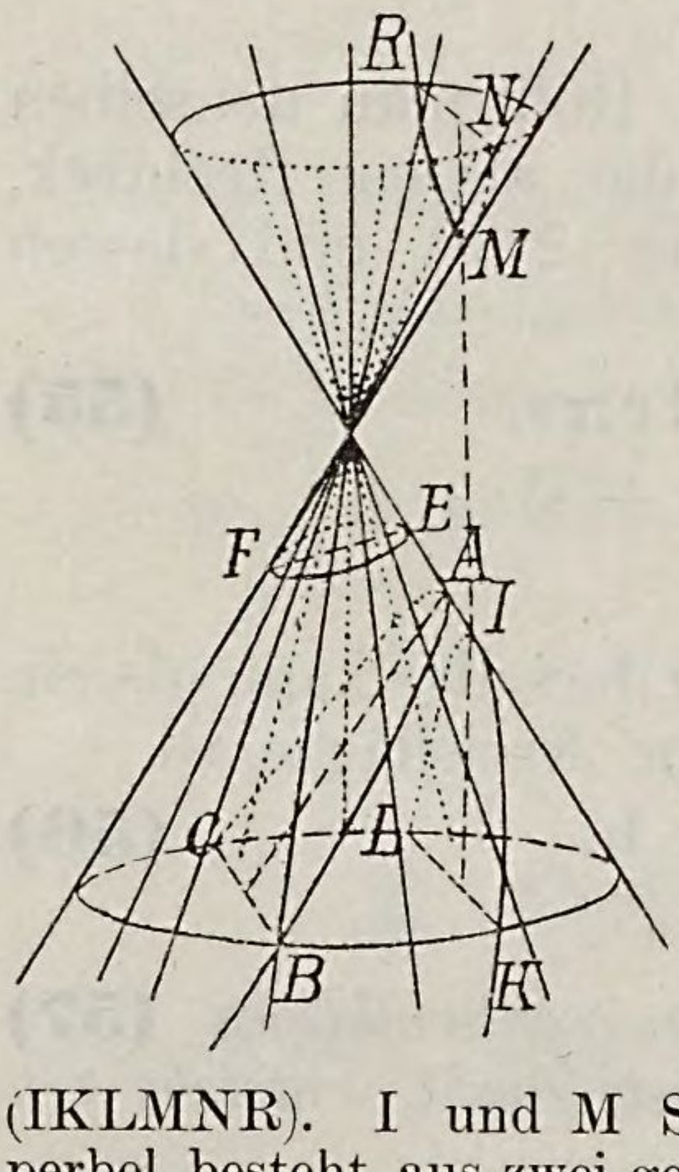
auch Radius (r) oder Durchmesser des Kegels. Ein Lot von der Spitze auf die Grundfläche heißt Höhe (h); dieselbe ist zugleich die Achse des Kegels. Die auf dem Mantel von der Spitze zur Grundfläche gezogene Strecke ist die Seite des Kegels (s).

$$s^2 = r^2 + h^2.$$

Der allgemeine Begriff der Kegelfläche ist folgender: Eine Kegelfläche entsteht, wenn eine grade Linie immer durch einen festen Punkt gehend entlang einer anderen (graden oder krummen) Linie gleitet. Die Ebene und ebenso der obige senkrechte Kreiskegel sind hievon besondere Fälle.

§ 101. 1) Ein zur Grundfläche paralleler Schnitt des Kegels ist ein Kreis. Die Radien der Schnittfläche und Grundfläche verhalten sich wie die Abstände von der Spitze.

2) Ein Achsenschnitt des Kegels ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie der Durchmesser und dessen Schenkel die Seite des Kegels ist. — Alle Achsenschnitte eines Kegels sind kongruent.



Wird ein Kegel schief geschnitten, so entstehen die sogenannten Kegelschnitte, und zwar:

a) Wenn der Schnitt zu einer Seite parallel ist (ABC), so heißt derselbe Parabel. Der Punkt, wo die Ebene der Parabel die Seite des zu ihr senkrechten Achsenschnitts trifft, heißt der Scheitel der Parabel (A). Die Parabel besteht aus zwei vom Scheitel ausgehenden kongruenten Halbästen, welche ins Unendliche verlaufen.

b) Wenn der Schnitt die Seiten auf der nämlichen Seite des Scheitels trifft, heißt derselbe Ellipse (EF). E und F heißen deren Scheitel, wie oben. Die Ellipse ist eine geschlossene krumme Linie.

c) Wenn der Schnitt die Seiten zum Teil auf ihrer Verlängerung über den Scheitel hinaus trifft, heißt derselbe Hyperbel (IKLMNR). I und M Scheitel der Hyperbel, wie oben. Die Hyperbel besteht aus zwei getrennten kongruenten Ästen (IKL und MNR), welche ins Unendliche verlaufen, und selbst wieder aus zwei kongruenten Halbästen bestehen.

§ 102. 1) Kegelmantel. Rollt man denselben in eine Ebene auf, so stellt er sich dar als ein Kreissektor, dessen Bogen der Umfang und dessen Radius die Seite des

Kegels ist. Indem wir diesen Sektor als Dreieck behandeln, ergiebt sich nach Plan. § 261

$$\textbf{Kegelmantel} = \mathbf{r\,\pi\,s.} \qquad \textbf{(58)}$$

2) Kegeloberfläche $= r\pi\,(r + s)$.

§ 103. Kegelinhalt; derselbe kann als Pyramide gelten, deren Grundfläche eine Kreisfläche ist.

$$\textbf{Kegel} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\,\mathbf{r^2\,\pi\,h.} \qquad \textbf{(59)}$$

§ 104. 1) Wird ein Kegel parallel zur Grundfläche geschnitten, so heißt der zwischen Grundfläche und Schnittfläche liegende Körper ein abgestumpfter Kegel oder ein Kegelstumpf. Derselbe wird von zwei parallelen Kreisflächen (Radien r_1 und r_2) und dem Kegelstumpfmantel (Seite s) begrenzt.

2) Mantel des Kegelstumpfs. Man erhält, sei es durch selbstständige Entwicklung — Aufrollung in eine Ebene — oder durch Vervollständigung zu einem ganzen Kegel:

$$\textbf{Kegelstumpfmantel} = (\mathbf{r_1 + r_2})\ \boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{s.} \qquad \textbf{(60)}$$

3) Oberfläche des Kegelstumpfs

$$= [r_1^2 + r_2^2 + (r_1 + r_2)\,s]\,\pi.$$

4) Inhalt des Kegelstumpfs. Indem man denselben als Pyramidenstumpf behandelt oder durch Vervollständigung zu einem Kegel erhält man:

$$\textbf{Kegelstumpf} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\,\boldsymbol{\pi}\mathbf{h}\left[\mathbf{r_1^2 + r_1\cdot r_2 + r_2^2}\right]. \qquad \textbf{(61)}$$

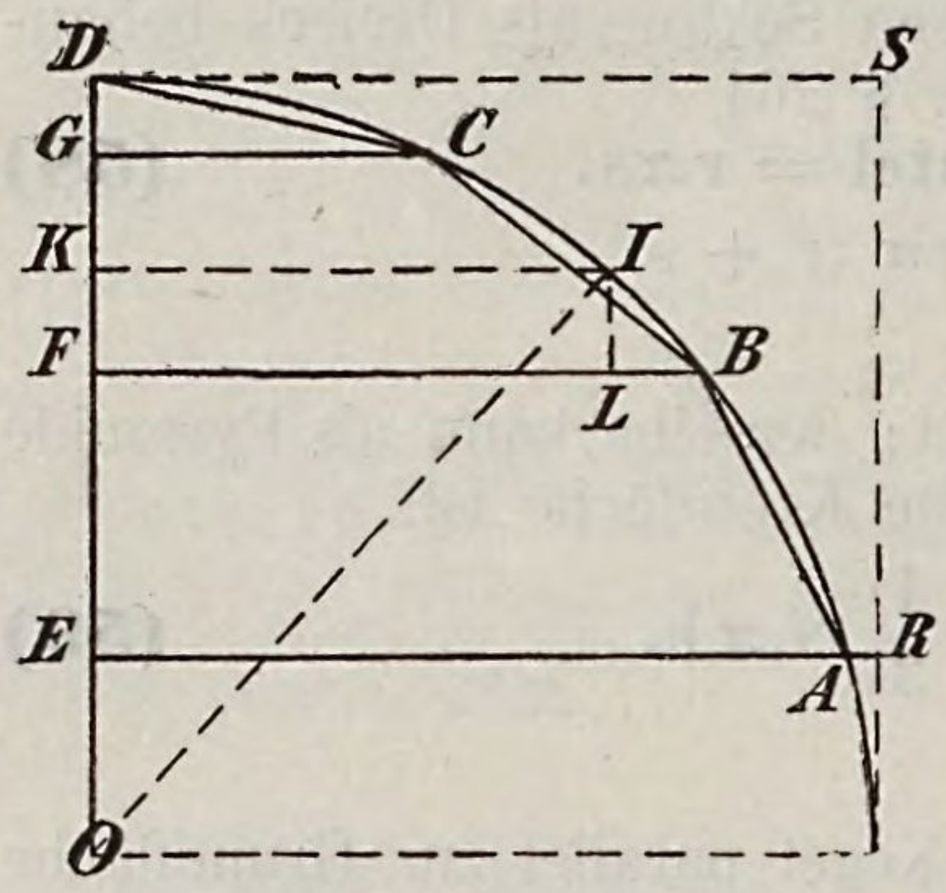
5) Zu bemerken ist noch:

$$s^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2.$$

XI. Die Kugel.

§ 105. Das durch eine Ebene abgeschnittene Stück der Kugelfläche heißt Haube. Das in der Mitte des zugehörigen Kugelschnitts errichtete Lot bis zum Schnitt mit der Haube heißt deren Höhe (h).

Wenn sich der Kreisbogen AD um den Radius OD als Achse dreht, erzeugt derselbe eine Haube. Denkt man



sich den Bogen in eine beliebige Anzahl, z. B. drei gleiche Teile geteilt (AB, BC, CD) so erzeugen die zugehörigen Sehnen AB und BC abgestumpfte Kegelmäntel, Sehne CD einen vollen Kegelmantel, deren Radien AE, BF, CG sind. Es ist nunmehr:

$$\text{Mantel BC} = (\text{BF} + \text{CG})\,\pi \cdot \text{BC}.$$

Man ziehe nun OI $\perp$ BC, IK $\perp$ OD, IL $\perp$ BF, so ist

$$\triangle \text{OIK} \sim \triangle \text{BIL},$$

also $\text{IK} : \text{OI} = \text{IL} : \text{BI}$ oder $(\text{BF} + \text{CG}) \cdot \text{BC} = 2 \cdot \text{OI} \cdot \text{FG}$.

Also $\text{Mantel BC} = 2 \cdot \text{OI}\,\pi\,\text{FG}$.

Ebenso $\text{Mantel AB} = 2 \cdot \text{OI}\,\pi\,\text{EF}$, $\text{Mantel CD} = 2 \cdot \text{OI}\,\pi\,\text{DG}$.

$$\text{Mantelsumme} = 2 \cdot \text{OI}\,\pi \cdot \text{DE}.$$

Nimmt man nun die Zahl der Teile immer größer und größer, so nähert sich einerseits die Mantelsumme der Haube, andererseits nähert sich der Abstand OI dem Kugelradius (r); DE bleibt Höhe der Haube (h). Somit

$$\textbf{Haube} = \mathbf{2\,r\,\pi\,h}. \qquad \textbf{(62)}$$

§ 106. Man denke sich das Quadrat über OD, und AE verlängert bis zum Schnitt mit der Quadratseite in R, so erzeugt RS bei der Drehung um die Achse OD einen Cylindermantel: Mantel RS. Es ist dann

$$\text{Haube} = \text{Mantel RS}.$$

Die Haube ist gleich dem gleichhohen Stück des um die Kugel beschriebenen Cylindermantels.

§ 107. Die Kugelfläche kann als Haube angesehen werden, deren Höhe der Durchmesser ist. Somit

$$\textbf{Kugelfläche} = \mathbf{2\,r\,\pi \cdot 2\,r} = \mathbf{4\,r^2\,\pi}. \qquad \textbf{(63)}$$

Satz. *Die Kugelfläche ist gleich dem Mantel des um dieselbe beschriebenen Cylinders. — Oder:*

Die Kugelfläche ist das Vierfache einer Hauptkreisfläche.

§ 108. Das zwischen zwei parallelen Kugelschnitten liegende Stück der Kugelfläche heißt Zone; der Abstand der Ebenen der Kugelschnitte heißt ihre Höhe (h). Indem man die Zone als die Differenz zweier Hauben ansieht, erhält man

$$\textbf{Zone} = 2r\pi h. \qquad \textbf{(64)}$$

§ 109. Das zwischen zwei Haupthalbkreisen liegende Stück der Kugelfläche heißt Streifen, auch Kugelzweieck. Der von den Haupthalbkreisen gebildete sphärische Winkel heißt der Winkel des Streifens (α).

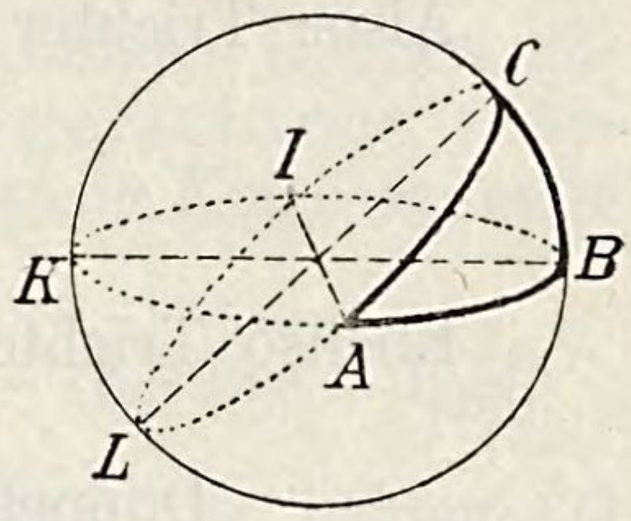
$$\textbf{Streifen} = \textbf{Kugelfläche} \cdot \frac{\alpha}{360}. \qquad \textbf{(65)}$$

§ 110. Zu bestimmen die Fläche des sphärischen Dreiecks ABC ($\triangle$). Man vervollständige dessen Seiten zu Hauptkreisen, so ist (die Kugelfläche mit S bezeichnet)

$$\text{Strf. ABICA} = \triangle + \triangle \text{BCI} = S \cdot \frac{\alpha}{360^0}.$$

$$\text{Strf. BCKAB} = \triangle + \triangle \text{ACK} = S \cdot \frac{\beta}{360^0}.$$

$$\text{Strf. CALBC} = \triangle + \triangle \text{ABL} = S \cdot \frac{\gamma}{360^0}.$$



Addiert man, und setzt für $\triangle$ BCI das ihm symmetrische also auch flächengleiche $\triangle$ AKL, so ergiebt sich

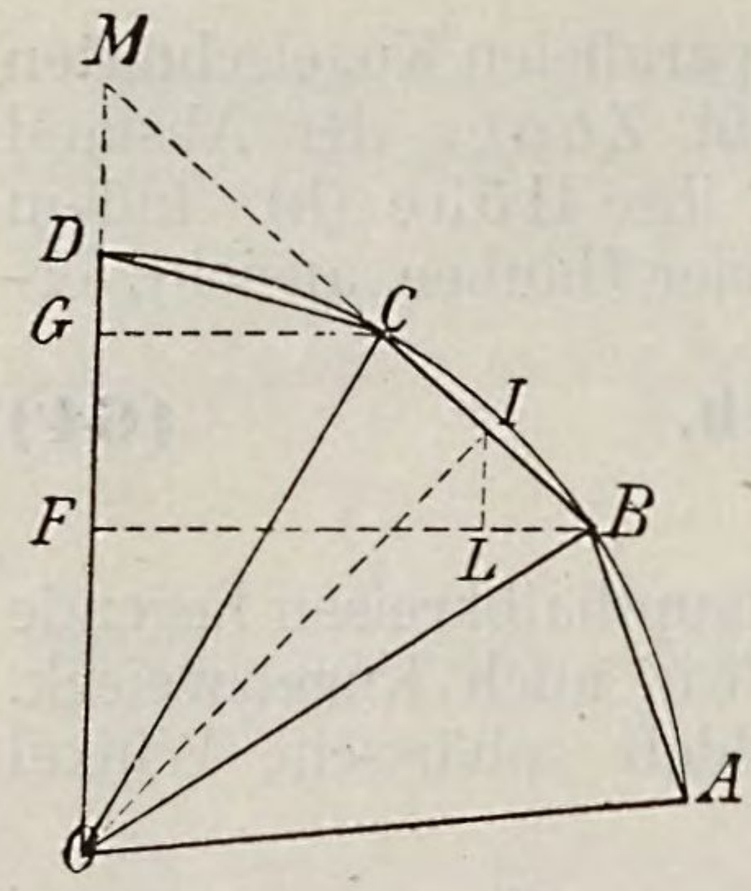
$$\frac{1}{2}S + 2\triangle = S \cdot \frac{\alpha+\beta+\gamma}{360^0}, \quad \text{od.} \quad \triangle = S \cdot \frac{\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta+\gamma-180^0\right)}{360^0}$$

$$\textbf{Sphärisches Dreieck} = \textbf{Kugelfläche} \cdot \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{360}. \qquad \textbf{(66)}$$

Satz. *Die Fläche eines sphärischen Dreiecks ist einem Streifen gleich, dessen Winkel der halbe sphärische Exzeß ist.*

(Vergleiche § 65).

§ 111. Wenn der Kreissektor AOD um den Radius OD gedreht wird, erzeugt er einen Kugelsektor. Man denke sich den Bogen AD in eine beliebige An-



zahl z. B. drei gleiche Teile geteilt (AB, BC, CD), so erzeugt bei der Drehung um die Achse OD:

a) △ COD einen Doppelkegel mit dem Radius CG und der Höhe OD; dagegen erzeugen

b) △ BOC und △ AOB trichterförmige Körper.

Es ist nun:

$$\text{Trichter BOC} = \text{Doppelkegel BOM} - \text{Doppelkegel COM}$$

$$= \frac{1}{3}\,\text{OM}\cdot\pi\,(\text{BF}^2 - \text{CG}^2).$$

Zieht man OI ⊥ BC, IL ⊥ BF, so ist △ BIL ∾ △ OIM also

$$\text{BI} : \text{BL} = \text{OM} : \text{OI}. \quad \text{also OM} = \frac{\text{BI}\cdot\text{OI}}{\text{BL}} = \frac{\text{BC}\cdot\text{OI}}{\text{BF}-\text{CG}}.$$

$$\text{Also: Trichter BOC} = \frac{1}{3}\left[(\text{BF} + \text{CG})\,\pi\cdot\text{BC}\right]\cdot\text{OI}$$

$$= \frac{1}{3}\,\text{Mantel BC}\cdot\text{OI}.$$

$$\text{Ebenso Trichter AOB} = \frac{1}{3}\,\text{Mantel AB}\cdot\text{OI}$$

$$\text{Doppelkegel COD} = \frac{1}{3}\,\text{Mantel CD}\cdot\text{OI}.$$

$$\text{Somit: Trichtersumme} = \frac{1}{3}\cdot\text{Mantelsumme}\cdot\text{OI}.$$

Nimmt man die Zahl der Teile immer größer und größer, so nähert sich einerseits die Trichtersumme dem Inhalt des Kugelsektors, andererseits nähert sich die Mantelsumme der Haube und der Abstand OI dem Kugelradius.

$$\text{Also} \quad \textbf{Kugelsektor} = \frac{1}{3}\,\textbf{Haube}\cdot\textbf{r}. \qquad \textbf{(67)}$$

Satz. *Der Kugelsektor ist einer Pyramide gleich, deren Grundfläche gleich der Haube und deren Höhe der Kugelradius ist.*

§ 112. Den Kugelinhalt selbst können wir als einen Kugelsektor ansehen, dessen Haube die Kugelfläche ist:

$$\textbf{Kugel} = \frac{1}{3}\,\textbf{Kugelfläche} \cdot r = \frac{4}{3}\,r^3\,\pi. \qquad \textbf{(68)}$$

Satz. *Die Kugel ist einer Pyramide gleich, deren Grundfläche gleich der Kugelfläche, und deren Höhe der Kugelradius ist.*

§ 113. Das durch eine Ebene abgeschnittene Stück der Kugel heißt Kugelsegment. Dasselbe ist zu behandeln als die Differenz zwischen einem Kugelsektor und einem Kegel. Es ergiebt sich

$$\textbf{Kugelsegment} = \frac{1}{3}\,\pi\,h^2\,(3r - h). \qquad \textbf{(69)}$$

Will man statt des Kugelradius (r) den Radius (r_1) des zu dem Segment gehörigen Kugelschnitts in die Formel bringen, so hat man:

$$r_1^2 + (r - h)^2 = r^2 \qquad r = \frac{r_1^2 + h^2}{2h}$$

$$\text{Kugelsegment} = \frac{1}{6}\,\pi\,h\left[3r_1^2 + h^2\right].$$

§ 114. 1) Das zwischen zwei parallelen Ebenen eingeschlossene Stück der Kugel heißt Kugelschicht. Dieselbe ist darzustellen als die Differenz zweier Kugelsegmente mit den Höhen h_1 und h_2 und es ist

$$\text{Kugelschicht} = \frac{1}{3}\,\pi \cdot [h_1^2\,(3r - h_1) - h_2^2\,(3r - h_2)].$$

2) Sind gegeben die Radien r_1 und r_2 der beiden die Schicht begrenzenden Kugelschnitte, und die Höhe der Schicht h, so ergiebt sich:

$$\text{Kugelschicht} = \frac{1}{3}\,\pi\,[3r\,(h_1^2 - h_2^2) - (h_1^3 - h_2^3)].$$

$$= \pi h\,[r\,(h_1 + h_2) - \frac{1}{3}\,(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)].$$

Es ist nunmehr:

$$r_1^2 = h_1\,(2r - h_1) \quad r_2^2 = h_2\,(2r - h_2);$$

folglich $r_1^2 + r_2^2 = 2r\,(h_1 + h_2) - (h_1^2 + h_2^2)$.

$$r\,(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}\,(r_1^2 + r_2^2) + \frac{1}{2}\,(h_1^2 + h_2^2).$$

Dies in obige Formel substituiert ergiebt

$$\text{Kugelschicht} = \frac{1}{6}\,\pi\,h\left[r\,(r_1^2 + r_2^2) + h^2\right].$$

Setzt man in dieser Formel $r_2 = 0$, so ergiebt sich die Formel für das Kugelsegment wie oben § 113, Anmerkung.

§ 115. Das zwischen zwei Haupthalbkreisflächen liegende Stück der Kugel heißt Kugelkeil. Es ist

$$\text{Kugelkeil} = \text{Kugel} \cdot \frac{\alpha}{360}.$$

§ 116. Der Raum der Kugel, der durch ein sphärisches Dreieck und die Ebenen des zugehörigen körperlichen Dreiecks eingeschlossen ist, heißt sphärische Pyramide. Es ist

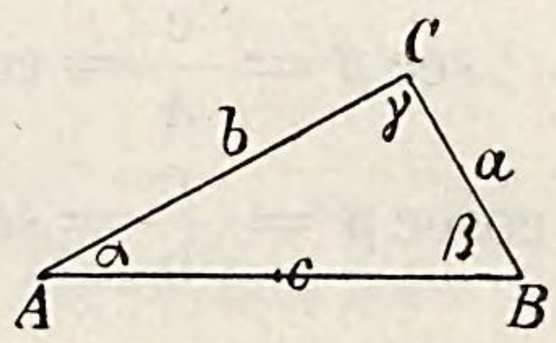
$$\text{Sphärische Pyramide} = \frac{1}{3} \text{ sphär. Dreieck} \cdot r.$$

ZWEITE HÄLFTE.

Trigonometrie.

I. Das rechtwinklige Dreieck.

§ 1. Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck ein Winkel gegeben ist, so ist damit die Gestalt des Dreiecks bestimmt, folglich sind auch bestimmt die Verhältnisse der Dreiecksseiten zu einander. Diese Verhältnisse heißen die trigonometrischen Funktionen und zwar



Begriff. *1) Das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse heißt Sinus.* **(1)**

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

2) Das Verhältnis der Nebenkathete zur Hypotenuse heißt Kosinus.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

3) Das Verhältnis der Gegenkathete zur Nebenkathete heißt Tangente.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \qquad \text{(tangens } \alpha\text{)}.$$

4) Das Verhältnis der Nebenkathete zur Gegenkathete heißt Kotangente.

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a} \qquad \text{(cotangens } \alpha\text{)}.$$

Außerdem kommen noch vor:

5) Das Verhältnis der Hypotenuse zur Nebenkathete heißt Sekante.

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} \qquad \text{(secans } \alpha\text{)}.$$

6) Das Verhältnis der Hypotenuse zur Gegenkathete heißt Kosekante.

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a} \qquad \text{(cosecans } \alpha\text{)}.$$

§ 2. Es ist

$\sin \beta = \frac{b}{c} = \cos \alpha$	also	$\mathbf{\sin (90^0 - \alpha) = \cos \alpha}$ **(2)**
$\cos \beta = \frac{a}{c} = \sin \alpha$		$\mathbf{\cos (90^0 - \alpha) = \sin \alpha}$
$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} = \operatorname{cotg} \alpha$		$\mathbf{\operatorname{tg} (90^0 - \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha}$
$\operatorname{cotg} \beta = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$		$\mathbf{\operatorname{cotg} (90^0 - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha}$
$\sec \beta = \frac{c}{a} = \operatorname{cosec} \alpha$		$\sec (90^0 - \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha$
$\operatorname{cosec} \beta = \frac{c}{b} = \sec \alpha$		$\operatorname{cosec} (90^0 - \alpha) = \sec \alpha$.

§ 3. 1) Sinus und Kosinus sind stets kleiner als die Einheit.

2) Tangente und Kotangente können kleiner und größer sein als die Einheit.

3) Sekante und Kosekante sind stets grösser als die Einheit.

§ 4. Die Werte der trigonometrischen Funktionen finden sich in den trigonometrischen Tafeln. Sekante und Kosekante werden als überflüssig weggelassen.

Die Tafel braucht nur für Winkel bis 45^0 zu reichen, indem z. B. $\sin 50^0 = \cos 40^0$. Zur Erleichterung des Aufschlagens stehen die Winkel über 45^0 auf der rechten Seite und entsprechen diesen die Unterschriften der Spalten, während die Uberschriften zu den Winkeln unter 45^0 gehören.

Zur Erleichterung der Rechnung enthält die Tafel sofort die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen. Den in der Tafel angegebenen Zahlen ist hiebei die negative Charakteristik zehn beizufügen.

§ 5. Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks.

Erster Fall. Gegeben die Hypotenuse c und ein Winkel α.

$$a = c \sin \alpha. \quad b = c \cos \alpha.$$

Beispiel 1. $c = 700\ m \quad \alpha = 23^0 12'$.

$$a = 700 \cdot 0{,}39394$$
$$= 275{,}758\ m$$
$$b = 700 \cdot 0{,}91913$$
$$= 643{,}391\ m$$

Beispiel 2. $c = 143{,}78\ m \quad \alpha = 52^0 10' 15''$

$\log a = 2{,}15770$ $\qquad$ $\log b = 2{,}15770$

$+ 9{,}89754 - 10$ $\qquad$ $+ 9{,}78768 - 10$

$= 2{,}05524$ $\qquad$ $= 1{,}94538$

$a = 113{,}56\ m$ $\qquad$ $b = 88{,}18\ m$.

Zweiter Fall. Gegeben eine Kathete b und ein Winkel α.

$$a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha. \qquad c = \frac{b}{\cos \alpha}.$$

Dritter Fall. Gegeben die Hypotenuse c und eine Kathete b.

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (unbequem)}.$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}. \quad a = c \cdot \sin \alpha = b \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Beispiel 3. $c = 458{,}9\ m \quad b = 287{,}4\ m$

$\log \cos \alpha = 12{,}45849$ $\qquad$ $\log a = 2{,}66172$

$- 2{,}66172 - 10$ $\qquad$ $+ 9{,}89187 - 10$

$= 9{,}79677 - 10$ $\qquad$ $= 2{,}55359$

$= \log \cos 51^0 13' 26''$. $\qquad$ $a = 357{,}7\ m$.

$\alpha = 51^0 13' 26''$.

$\beta = 38^0 46' 34''$.

Vierter Fall. Gegeben die beiden Katheten a und b.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (unbequem)}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\cos \alpha}.$$

§ 6. Anwendungen.

1) Gleichschenkliges Dreieck: Grundlinie c, Schenkel a, Höhe h.

$$\sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{\frac{1}{2} c}{a}. \quad \cos \frac{1}{2} \gamma = \frac{h}{a}. \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \frac{\frac{1}{2} c}{h}.$$

2) Sehne s und Centriwinkel ω. Abstand vom Mittelpunkt a. Radius r.

$$\sin \frac{1}{2}\omega = \frac{\frac{1}{2}s}{r}. \quad \cos \frac{1}{2}\omega = \frac{a}{r}. \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}\omega = \frac{\frac{1}{2}s}{a}.$$

Dreiecksfläche:

$$\triangle = r^2 \cdot \sin \frac{1}{2}\omega \cdot \cos \frac{1}{2}\omega \text{ oder } \triangle = \frac{1}{2} r^2 \sin \omega.$$

Hieraus zu berechnen das Segment.

3) Entfernung eines Gegenstandes e, Größe (Höhe, Breite u. s. w.) desselben g und Gesichtswinkel σ.

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\sigma = \frac{\frac{1}{2}g}{e}.$$

§ 7. Stereometrische Anwendungen.

1) Neigungswinkel α einer Strecke m gegen eine Ebene; p der Riß

$$p = m \cos \alpha.$$

2) Neigungswinkel α zweier Ebenen. F die Fläche einer Figur in der einen Ebene, P die Fläche ihres Risses auf die andere Ebene.

$$P = F \cos \alpha.$$

Die Formel gilt zunächst von einem Dreieck, dessen Grundlinie parallel zur Kante ist, und damit von jeder Figur, weil sich jede Figur in derartige Dreiecke zerlegen läßt.

3) Reguläre Pyramide. Eckradius der Grundfläche r, Seitenradius r', Seitenkante s, Höhe h, Höhe einer Seitenfläche h'.

Neigungswinkel α einer Seitenkante gegen die Grundfläche:

$$\sin \alpha = \frac{h}{s}, \quad \cos \alpha = \frac{r}{s}.$$

Neigungswinkel β einer Seitenfläche gegen die Grundfläche:

$$\sin \beta = \frac{h}{h'}, \quad \cos \beta = \frac{r'}{h'}.$$

4) Kegel. Neigungswinkel α einer Seite gegen die Grundfläche:

$$\sin \alpha = \frac{h}{s}, \quad \cos \alpha = \frac{r}{s}.$$

Winkel γ an der Spitze des Achsenschnitts:

$$\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{r}{s}, \quad \cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{h}{s}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{r}{h}.$$

5) Kugel. a) Der Achsenschnitt eines Kugelsektors habe den Centriwinkel ω. Dann ist

Radius r_1 des zugehörigen Parallelkreises: $r_1 = r \sin \frac{1}{2}\omega$;

dessen Abstand a vom Mittelpunkt: $a = r \cdot \cos \frac{1}{2}\omega$;

Höhe h der zugehörigen Haube: $h = r \sin \frac{1}{2}\omega \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{4}\omega$.

$$\text{Haube} = 2r^2\pi \sin \frac{1}{2}\omega \operatorname{tg} \frac{1}{4}\omega.$$

$$\text{Kugelsektor} = \frac{2}{3} r^3\pi \sin \frac{1}{2}\omega \operatorname{tg} \frac{1}{4}\omega.$$

b) Ein Parallelkreis habe von seinem Äquator den Bogenabstand β (an der Erdkugel: geographische Breite, an der Himmelskugel: Höhe, bez. Deklination, bez. astronomische Breite).

Radius r_1 des Parallelkreises: $r_1 = r \cos \beta$;

dessen Abstand a vom Mittelpunkt: $a = r \sin \beta$;

(auch Höhe der Zone zwischen Parallelkreis und Äquator)

Höhe h der zugehörigen Haube: $h = r \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90^0 - \beta)$.

II. Lineare trigonometrische Funktionen.

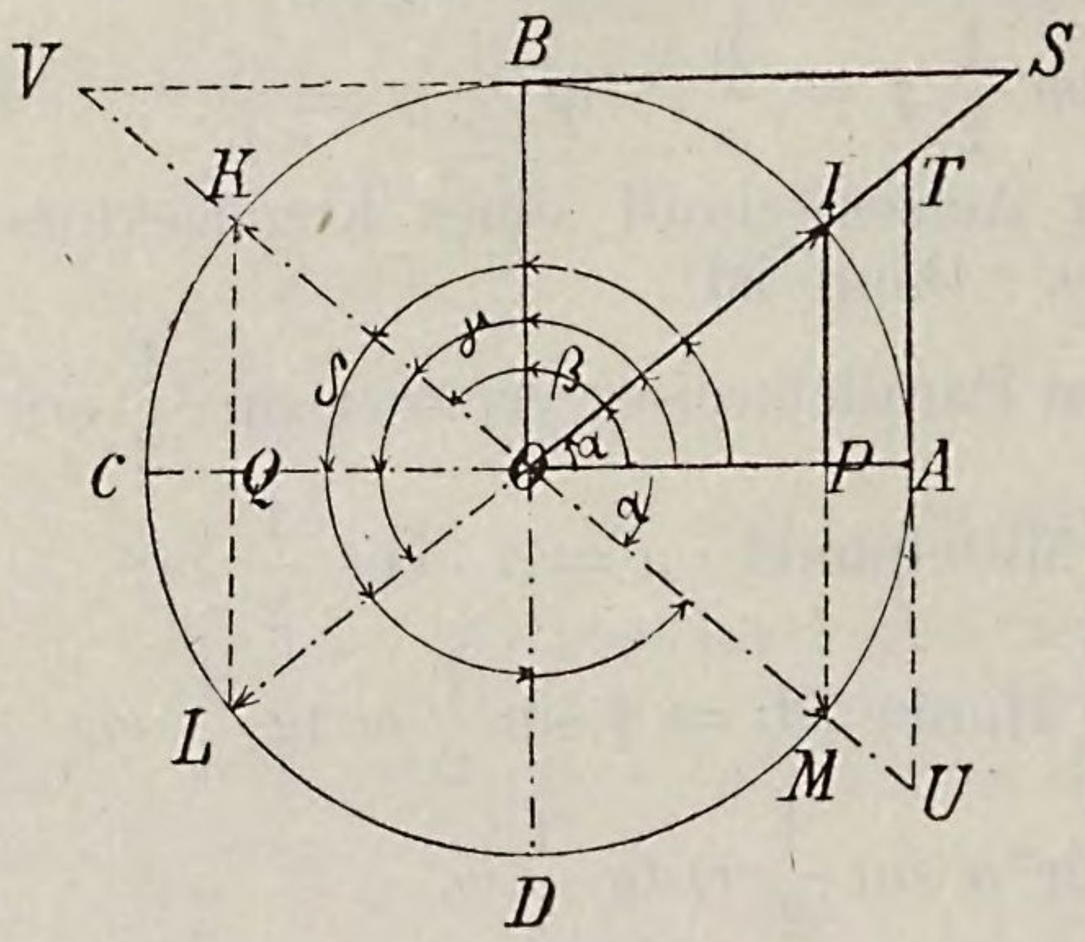
§ 8. Die trigonometrischen Funktionen lassen sich als Strecken darstellen, wenn man einen Kreis beschreibt, dessen Radius die Maßeinheit ist.

Wir nennen (Fig. Seite 52) OA den Hauptradius, den darauf senkrechten Radius OB nennen wir Nebenradius. Einen Radius OI denkenwir uns beweglich und nennen ihn Zeiger.

Man fälle IP $\perp$ OA, so heißt IP die Ordinate, OP die Abszisse. (Planimetrie § 90).

Die in A errichtete Tangente, verlängert bis zum Schnitt mit dem Zeiger in T heißt Haupttangente, ebenso heißt die Tangente BS die Nebentangente. Endlich heißt OT die Hauptsekante, OS die Nebensekante.

Der Winkel des Zeigers mit dem Hauptradius sei α, so ist



$\sin \alpha = \text{IP},$
$\cos \alpha = \text{OP},$
$\operatorname{tg} \alpha = \text{AT},$
$\operatorname{cotg} \alpha = \text{BS},$
$\sec \alpha = \text{OT},$
$\operatorname{cosec} \alpha = \text{OS}.$

D. h. In einem Kreis mit dem Radius eins wird vorgestellt:

1) der Sinus durch die Ordinate;

2) der Kosinus durch die Abszisse;

3) die Tangente durch die Haupttangente;

4) die Kotangente durch die Nebentangente;

5) die Sekante durch die Hauptsekante;

6) die Kosekante durch die Nebensekante.

Die Sätze in § 3 werden damit unmittelbar veranschaulicht.

Für den Winkel $(90^0 - \alpha)$ sind Hauptradius und Nebenradius vertauscht; damit werden die Formeln in § 2 von selbst einleuchtend.

§ 9. Funktionen von 0^0. Wenn der Zeiger OI in der Lage OA ist, ist $\alpha = 0$. Also

$\sin 0^0 = 0. \quad \cos 0^0 = 1. \quad \operatorname{tg} 0^0 = 0. \quad \operatorname{cotg} 0^0 = \infty.$

§ 10. Erster Quadrant 0^0 bis 90^0. Man denke sich den Zeiger von A bis B bewegt, so ergiebt sich

sin (0^0 bis 90^0) wachsend,
cos (0^0 bis 90^0) abnehmend,
tg (0^0 bis 90) wachsend,
cotg (0^0 bis 90^0) abnehmend.

§ 11. Funktionen von 90^0. Der Zeiger ist in der Lage OB. Dann ist

$\sin 90^0 = 1. \quad \cos 90^0 = 0. \quad \operatorname{tg} 90^0 = \infty. \quad \operatorname{cotg} 90^0 = 0.$

Auch in Übereinstimmung mit Satz **2.**

§ 12. Zweiter Quadrant 90^0 bis 180^0. Der Zeiger habe die Lage OK und bilde mit dem Hauptradius den Winkel β, so daß $\beta = 180^0 - \alpha$. Alsdann ist

$\sin\beta = KQ = IP = \sin\alpha$. d. h. $\mathbf{\sin(180^0-\alpha) = \sin\alpha}$. **(3)**
$\cos\beta = OQ = -OP = -\cos\alpha$. $\mathbf{\cos(180^0-\alpha) = -\cos\alpha}$.
$\operatorname{tg}\beta = AU = -AT = -\operatorname{tg}\alpha$. $\mathbf{\operatorname{tg}(180^0-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha}$.
$\operatorname{cotg}\beta = BV = -BS = -\operatorname{cotg}\alpha$. $\mathbf{\operatorname{cotg}(180^0-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha}$.

Die negativen Zeichen bedeuten die entgegengesetzte Lage zu den entsprechenden Funktionen des Supplementswinkels α. (Vergl. Plan. § 90 und Stereom. § 37).

Demnach ergiebt sich, wenn man sich den Zeiger von B bis C bewegt denkt:

sin (90^0 bis 180^0) abnehmend,
cos (90^0 bis 180^0) abnehmend (wachsend ins Negative),
tg (90^0 bis 180^0) zunehmend (abnehmend im Negativen),
cotg (90^0 bis 180^0) abnehmend (wachsend im Negativen).

§ 13. Funktionen von 180^0. Der Zeiger ist in der Lage OC. Dann ist
$\sin 180^0 = 0$. $\cos 180^0 = -1$. $\operatorname{tg} 180^0 = 0$. $\operatorname{cotg} 180^0 = \infty$.

§ 14. Dritter Quadrant 180^0 bis 270^0. Der Zeiger habe die Lage OL und bilde mit dem Hauptradius den Winkel γ (im Sinne der Pfeile gezählt) derart, daß $\gamma = 180^0 + \alpha$. Alsdann ist

$\sin\gamma = LQ = -IP = -\sin\alpha$, d. h. $\sin(180^0+\alpha) = -\sin\alpha$.
$\cos\gamma = OQ = -OP = -\cos\alpha$, $\cos(180^0+\alpha) = -\cos\alpha$.
$\operatorname{tg}\gamma = AT = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}(180^0+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$.
$\operatorname{cotg}\gamma = BS = \operatorname{cotg}\alpha$, $\operatorname{cotg}(180^0+\alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$.

Denkt man sich nun den Zeiger von C bis D bewegt, so ergiebt sich:

sin (180^0 bis 270^0) abnehmend (wachsend ins Negative),
cos (180^0 bis 270^0) zunehmend (abnehmend im Negativen),
tg (180^0 bis 270^0) zunehmend,
cotg (180^0 bis 270^0) abnehmend.

§ 15. Funktionen von 270^0. Der Zeiger habe die Lage OD. Dann ist
$\sin 270^0 = -1$. $\cos 270^0 = 0$. $\operatorname{tg} 270^0 = \infty$. $\operatorname{cotg} 270^0 = 0$.

§ 16. Vierter Quadrant 270^0 bis 360^0. Der Zeiger habe die Lage OM und bilde mit dem Hauptradius den Winkel δ (im Sinne der Pfeile), so daß $\delta = 360^0 - \alpha$. Alsdann ist

$\sin\delta = MP = -IP = -\sin\alpha$, d. h. $\sin(360^0-\alpha) = -\sin\alpha$,
$\cos\delta = OP = \cos\alpha$, $\cos(360^0-\alpha) = \cos\alpha$,
$\operatorname{tg}\delta = AU = -AT = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}(360^0-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$,
$\operatorname{cotg}\delta = BV = -BS = -\operatorname{cotg}\alpha$. $\operatorname{cotg}(360^0-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$.

Denkt man sich nun den Zeiger von D bis A bewegt, so ergiebt sich

sin (270^0 bis 360^0) wachsend (abnehmend im Negativen),
cos (270^0 bis 360^0) wachsend,
tg (270^0 bis 360^0) wachsend, (abnehmend im Negativen),
cotg (270^0 bis 360^0) abnehmend, (wachsend im Negativen).

§ 17. Funktionen von 360^0. Der Zeiger ist wieder in A; die Funktionen von 360^0 sind dieselben wie die von 0^0.

$\sin 360^0 = 0$. $\cos 360^0 = 1$. $\operatorname{tg} 360^0 = 0$. $\operatorname{cotg} 360^0 = \infty$.

§ 18. Zusammenstellung.

1) Der Sinus beginnt bei 0^0 mit dem Werte 0, erreicht bei 90^0 seinen größten Wert + 1, fällt von da bis 180^0, wo er 0 ist, wird von da negativ und hat bei 270^0 seinen kleinsten Wert − 1, nimmt von da bis 360^0 wieder zu, wo er 0 ist.

2) Der Kosinus beginnt bei 0^0 mit seinem größten Werte + 1, nimmt von da bis 90^0 ab, wo er 0 wird, wird von da negativ und hat bei 180^0 seinen kleinsten Wert − 1, nimmt von da bis 270^0 wieder zu, wo er 0 ist, und wächst weiter bis 360^0, wo er wieder seinen größten Wert + 1 erreicht.

3) Die Tangente beginnt bei 0^0 mit dem Werte 0, durchläuft bis 90^0 alle möglichen Zahlenwerte und hat dann den Wert ∞, und zwar zugleich $+\infty$ und $-\infty$, (Sprung durch das Unendliche), nimmt dann von $-\infty$ an wieder zu, bis sie bei 180^0 wieder 0 ist. Im dritten und vierten Quadranten wiederholt sich derselbe Vorgang.

4) Die Kotangente verfolgt das entgegengesetzte Verhalten wie die Tangente.

§ 19. Sucht man zu einer gegebenen trigonometrischen Funktion den zugehörigen Winkel, so entsprechen derselben stets zwei Winkel, und zwar:

1) einem positiven Sinus — ein Winkel im ersten und einer im zweiten Quadranten,
einem negativen Sinus — ein Winkel im dritten und einer im vierten Quadranten,
2) einem positiven Kosinus — ein Winkel im ersten und einer im vierten Quadranten,

einem negativen Kosinus — ein Winkel im zweiten und einer im dritten Quadranten,

3) einer positiven Tangente — ein Winkel im ersten und einer im dritten Quadranten,
einer negativen Tangente — ein Winkel im zweiten und einer im vierten Quadranten,

4) einer positiven Kotangente — ein Winkel im ersten und einer im dritten Quadranten,
einer negativen Kotangente — ein Winkel im zweiten und einer im vierten Quadranten.

§ 20. Funktionen negativer Winkel. Einen solchen $(-\alpha)$ erhalten wir durch eine Drehung im entgegengesetzten Sinn (von A bis M). Es ist dann

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{cotg}(-\alpha) &= -\operatorname{cotg}\alpha. \end{aligned} \qquad \textbf{(4)}$$

III. Beziehungen zwischen den Funktionen eines Winkels.

§ 21. Reziproke Beziehungen.

1) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$, folglich $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1$ **(5)**

folgt auch aus AT : OA = OB : BS. (Fig. § 8).

2) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$, folglich $\sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1$.

folgt auch aus IP : OI = OB : OS.

3) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\sec\alpha = \frac{c}{b}$, folglich $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$.

folgt auch aus OP : OI = OA : OT.

§ 22. Verhältnisbeziehungen.

1) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$. **(6)**

folgt auch aus IP : OP = AT : OA. (Fig. § 8).

2) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha} = \frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a}{c} = \sin\alpha$.

folgt auch aus AT : OT = IP : OI.

3) $\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{c} = \cos\alpha$.

folgt auch aus BS : OS = OP : OI.

§ 23. Pythagoräische Beziehungen. Aus $a^2 + b^2 = c^2$ folgt

1) $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1.$ d. h. $\mathbf{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.}$ **(7)**

folgt auch aus $\overline{IP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OI}^2$. (Fig. § 8).

2) $\frac{a^2}{b^2} + 1 = \frac{c^2}{b^2}$ d. h. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha.$

folgt auch aus $\overline{OA}^2 + \overline{AT}^2 = \overline{OT}^2$.

3) $1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$ d. h. $1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha.$

folgt auch aus $\overline{OB}^2 + \overline{BS}^2 = \overline{OS}^2$.

§ 24. Gegeben der Sinus.

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}, \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}.$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}, \qquad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Beachte die Zweideutigkeit der Wurzeln.

§ 25. Gegeben der Kosinus.

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}, \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}.$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \qquad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}.$$

§ 26. Gegeben die Tangente.

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \qquad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

$$\sec \alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \qquad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

§ 27. Gegeben die Kotangente.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha}.$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}.$$

$$\sec\alpha = \frac{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}{\operatorname{cotg}\alpha}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}.$$

§ 28. Funktionen von 30^0. Einen Winkel von 30^0 erhält man, wenn man im gleichseitigen Dreieck einen Winkel halbiert. Daher:

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

$$\text{folglich } \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}86603,$$

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}57735, \quad \operatorname{cotg} 30^0 = \sqrt{3} = 1{,}73205.$$

Man erhält diese Funktionen auch aus einem Kreis mit dem Radius eins als

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2}s_6 = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^0 = a_6 = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{2}s'_6 = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Damit sind auch die Funktionen von 60^0 bekannt.

Dieselben ergeben sich auch aus einem Kreis mit dem Radius eins als

$$\sin 60^0 = \frac{1}{2}s_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos 60^0 = a_3 = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^0 = \frac{1}{2}s'_3 = \sqrt{3}.$$

§ 29. Funktionen von 45^0. Einen Winkel von 45^0 hat man im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck. Daher

$$\operatorname{tg} 45^0 = \operatorname{cotg} 45^0 = 1.$$

$$\text{folglich } \sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}70711.$$

Oder aus einem Kreis mit dem Radius eins:

$$\sin 45^0 = \frac{1}{2}s_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}. \quad \cos 45^0 = a_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$$\operatorname{tg} 45^0 = \frac{1}{2}s'_4 = 1.$$

§ 30. Funktionen von 18^0. In einem Kreis mit dem Radius eins ist

$$\sin 18^0 = \frac{1}{2}\, s_{10} = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) = 0{,}30902.$$

$$\cos 18^0 = a_{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 0{,}95106.$$

$$\operatorname{tg} 18^0 = \frac{1}{2}\, s'_{10} = \frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}} = 0{,}32492.$$

§ 31. Trigonometrische Gleichungen sind solche, in welchen ein Winkel (φ, χ) durch seine Funktionen bestimmt werden soll. Kommen mehrere Funktionen des Winkels vor, so ist die Gleichung so umzugestalten, daß nur noch eine Funktion verbleibt.

Beispiel 1. $\sin\varphi - \cos\varphi = 0{,}2$

$$\sin\varphi - \sqrt{1-\sin^2\varphi} = 0{,}2$$

$(\sin\varphi)_1 = 0{,}8.$	$(\sin\varphi)_2 = -0{,}6.$
$\varphi_1 = 53^0 8'.\ \varphi_2 = 126^0 52'.$	$\varphi_3 = -36^0 52'.\ \varphi_4 = -143^0 8'.$ oder $\varphi_3 = 323^0 8'.\ \varphi_4 = 216^0 52'.$

Beispiel 2. $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{cotg}\varphi = 2\frac{1}{2}$

$$\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{5}{2}$$

$(\operatorname{tg}\varphi)_1 = 2.$	$(\operatorname{tg}\varphi)_2 = \frac{1}{2}$
$\varphi_1 = 63^0 26'$	$\varphi_3 = 26^0 34'$
$\varphi_2 = 243^0 26'$	$\varphi_4 = 206^0 34'.$

§ 32. Berechnung algebraischer Ausdrücke. Trigonometrische Funktionen können oft dazu dienen algebraische Ausdrücke zur logarithmischen Rechnung herzurichten.

Beispiel 1. $x = \sqrt{a^2 + b^2}.$

Wir formen um $x = a\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$

und substituieren $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$

somit $x = \frac{a}{\cos\varphi}.$

Beispiel 2. $x = \sqrt{a^2 - b^2} = a\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}.$

Der Ausdruck ist nur reell, wenn $b < a$; also kann man setzen

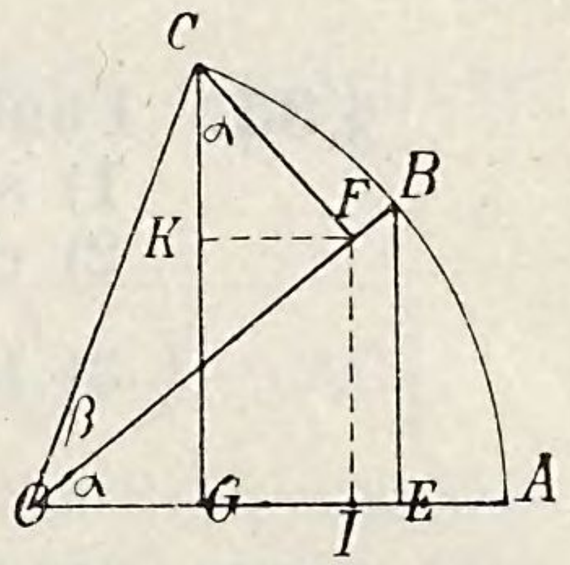
$$\frac{b}{a} = \sin \varphi$$

und erhält $x = a \cdot \cos \varphi$

IV. Funktionen zusammengesetzter Winkel.

§ 33. Funktionen der Summe zweier Winkel. In einem Kreis mit dem Radius eins sei gezogen BE ⊥ OA, CF ⊥ OB, CG ⊥ OA, so ist

$\sin \alpha = BE$, $\sin \beta = CF$, $\sin (\alpha+\beta) = CG$.
$\cos \alpha = OE$, $\cos \beta = OF$, $\cos (\alpha+\beta) = OG$.



Zieht man ferner FJ ⊥ OA, und FK ⊥ CG, so ist

1) $\sin (\alpha + \beta) = CG = FJ + CK = OF \cdot \sin \alpha + CF \cdot \cos \alpha$.

$$\mathbf{\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta} \quad \mathbf{(8)}$$

2) $\cos (\alpha + \beta) = OG = OJ - FK = OF \cos \alpha - CF \cdot \sin \alpha$

$$\mathbf{\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.} \quad \mathbf{(9)}$$

3) $$\mathrm{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner durch $\cos \alpha \cos \beta$, so ergiebt sich

$$\mathbf{\mathrm{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}.} \quad \mathbf{(10)}$$

§ 34. Funktionen der Differenz zweier Winkel. Dieselben lassen sich aus den vorigen mit Hülfe der Formeln **4** entwickeln, wenn man statt β den negativen Winkel $(-\beta)$ einführt, oder auch durch selbständige Figur ähnlich wie Fig. § 33. Beide Verfahrungsweisen ergeben

$$\mathbf{1)\ \sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta} \quad \mathbf{(11)}$$

$$\mathbf{2)\ \cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta} \quad \mathbf{(12)}$$

$$\mathbf{3)\ \mathrm{tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}.} \quad \mathbf{(13)}$$

Die Formeln **2** und **3** lassen sich aus diesen Formeln ableiten:

$\sin (90^0 - \alpha) = \sin 90^0 \cos \alpha - \cos 90^0 \sin \alpha = \cos \alpha$ u. s. w.
$\sin (180^0 - \alpha) = \sin 180^0 \cos \alpha - \cos 180^0 \sin \alpha = \sin \alpha$ u. s. w.

Ebenso die Formeln in § 14 und 16.

$\sin (180^0 + \alpha) = \sin 180^0 \cos \alpha + \cos 180^0 \sin \alpha = -\sin \alpha$ u. s. w.
$\sin (360^0 - \alpha) = \sin 360^0 \cos \alpha - \cos 360^0 \sin \alpha = -\sin a$ u. s. w.

Auch die Formeln 4.
$\sin(-\alpha) = \sin(0^0 - \alpha) = \sin 0^0 \cos\alpha - \cos 0^0 \sin\alpha = -\sin\alpha$
u. s. w.

Der obige Beweis der Formeln 8 bis 13 hat nur Gültigkeit für den Fall, daß sowohl α und β, als auch $(\alpha + \beta)$ und $(\alpha - \beta)$ spitze Winkel sind. Die Allgemeingültigkeit derselben ist beispielsweise durch folgenden Beweisgang darzuthun.

Es seien α und β beide stumpfe Winkel und zwar $\alpha = 180^0 - \alpha'$ und $\beta = 180^0 - \beta'$, so ist

$\sin(\alpha + \beta) = \sin[360^0 - (\alpha' + \beta')] = -\sin(\alpha' + \beta')$
$= -\sin\alpha' \cos\beta' - \cos\alpha' \sin\beta' = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$, wie oben.

§ 35. Funktionen des doppelten Winkels

1) $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$ **(14)**

2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$ **(15)**

3) $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$ **(16)**

§ 36. Funktionen des halben Winkels.

Es ist nach **15** $\quad \cos^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\alpha = \cos\alpha.$

Zusammengehalten mit $\cos^2\frac{1}{2}\alpha + \sin^2\frac{1}{2}\alpha = 1$ nach **7**.

ergiebt sich

1) $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)}$ **(17)**

2) $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)}$ **(18)**

somit

3) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}.$

§ 37. 1) $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$
$= \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma + \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma + \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma$
$- \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$

2) $\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \cos\gamma$
$- \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma - \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma - \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma.$

3) $(\operatorname{tg}\alpha + \beta + \gamma)$
$= \dfrac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma) - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}{1 - (\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma)}.$

4) $\sin 3\alpha = 3 \cos^2\alpha \sin\alpha - \sin^3\alpha.$

5) $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3 \cos\alpha \sin^2\alpha.$

6) $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3 \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2\alpha}.$

§ 38. Trigonometrische Gleichungen.

Beispiel 1. $a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi = c \cdot \sin 2\varphi$

$$= 2\,c \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$$a \cdot \operatorname{tg} \varphi + b \cdot \operatorname{cotg} \varphi = 2\,c \quad \text{u. s. w.}$$

Beispiel 2. $\sin(\alpha + \varphi) + \sin(\alpha - \varphi) = m$

$$\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \cdot \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi = m$$

$$\cos \varphi = \frac{m}{2 \sin \alpha}.$$

§ 39. Berechnung algebraischer Ausdrücke.

Die Gleichung

$$A x^2 + B x + C = 0$$

ergiebt

$$x = \frac{1}{A} \cdot \left[-\frac{1}{2} B + \sqrt{\left(\frac{1}{2} B\right)^2 - AC} \right].$$

Soll dieser Ausdruck für logarithmische Rechnung hergerichtet werden, so ist zu unterscheiden, ob C positiv oder negativ ist

1) Für positive C.

$$x = \frac{\frac{1}{2} B}{A} \left[-1 + \sqrt{1 - \frac{AC}{\left(\frac{1}{2} B\right)^2}} \right].$$

Da reelle Werte nur möglich sind, wenn $AC < \left(\frac{1}{2} B\right)^2$, ist es erlaubt zu setzen:

$$\frac{AC}{\left(\frac{1}{2} B\right)^2} = \sin^2 \varphi. \qquad \text{d. h. } \sin \varphi = \frac{\sqrt{AC}}{\frac{1}{2} B}.$$

Alsdann ist

$$x = \frac{\frac{1}{2} B}{A} \left[-1 \pm \cos \varphi \right]$$

$$x_1 = -\frac{\frac{1}{2} B}{A} \left[1 - \cos \varphi \right] = -\frac{\frac{1}{2} B}{A} \cdot 2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi$$

$$= -\frac{B}{A} \sin^2 \frac{1}{2} \varphi.$$

$$x_2 = -\frac{\frac{1}{2}B}{A}\cdot\left[1+\cos\varphi\right] = -\frac{\frac{1}{2}B}{A}\cdot 2\cos^2\frac{1}{2}\varphi$$
$$= -\frac{B}{A}\cdot\cos^2\frac{1}{2}\varphi.$$

2) Für negative C ist x immer reell. Wir setzen:

$$-\frac{AC}{\left(\frac{1}{2}B\right)^2} = \operatorname{tg}^2\varphi \qquad \text{d. h. } \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{-AC}}{\frac{1}{2}B}.$$

Alsdann ist

$$x = \frac{\frac{1}{2}B}{A}\left[-1\pm\sec\varphi\right] = \frac{\frac{1}{2}B}{A}\left[-1\pm\frac{1}{\cos\varphi}\right]$$

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2}B}{A\cdot\cos\varphi}\left[1-\cos\varphi\right] = \frac{\frac{1}{2}B}{A\cos\varphi}\cdot 2\sin^2\frac{1}{2}\varphi$$
$$= -\frac{B\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{A\cos\varphi}.$$

$$x_2 = -\frac{\frac{1}{2}B}{A\cos\varphi}\left[1+\cos\varphi\right] = -\frac{\frac{1}{2}B}{A\cos\varphi}\cdot 2\cos^2\frac{1}{2}\varphi$$
$$= -\frac{B\cdot\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{A\cos\varphi}.$$

§ 40. Umwandlung trigonometrischer Ausdrücke. Es sollen die vier Ausdrücke

1) $\sin\alpha+\sin\beta$ 3) $\cos\alpha+\cos\beta$
2) $\sin\alpha-\sin\beta$ 4) $\cos\alpha-\cos\beta$

in eine Form gebracht werden, welche für logarithmische Rechnung geeignet ist. Es gelingt dies, wenn man einführt

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\sigma \text{ und } \frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\delta,$$
$$\text{oder } \alpha=\sigma+\delta,\ \beta=\sigma-\delta.$$

Dies ergiebt

1) $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ **(19)**

2) $\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ **(20)**

$$\textbf{3)}\ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \quad \textbf{(21)}$$

$$\textbf{4)}\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \quad \textbf{(22)}$$

§ 41. 1) $\sin\alpha \pm \cos\beta = \sin\alpha \pm \sin(90^0 - \beta)$ u. s. w.

2) $$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\cdot\cos\beta}.$$

3) $$\mathrm{a}\sin\alpha + \mathrm{b}\sin\beta = \mathrm{a}\cdot\left[\sin\alpha + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\sin\beta\right].$$

Man setzt $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\sin\beta = \sin\varphi$, wenn $\mathrm{b}\sin\beta < \mathrm{a}$.

Oder: $$\mathrm{a}\sin\alpha + \mathrm{b}\sin\beta = \mathrm{a}\sin\alpha\left[1 + \frac{\mathrm{b}\sin\beta}{\mathrm{a}\sin\alpha}\right].$$

Man setzt $$\frac{\mathrm{b}\sin\beta}{\mathrm{a}\sin\alpha} = \operatorname{tg}\varphi$$

so ist $$\mathrm{a}\sin\alpha + \mathrm{b}\sin\beta = \mathrm{a}\sin\alpha\,[\operatorname{tg}45^0 + \operatorname{tg}\varphi]$$
$$= \mathrm{a}\sin\alpha\cdot\frac{\sin(45^0+\varphi)}{\cos 45^0\cos\varphi}.$$

§ 42. Wenn $\alpha+\beta+\gamma = 180^0$ (Winkel eines Dreiecks), so ist

1) $$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cdot\cos\frac{1}{2}\alpha\cdot\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma.$$

2) $$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma.$$

3) $$\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{1}{2}\beta\cdot\cos\frac{1}{2}\gamma.$$

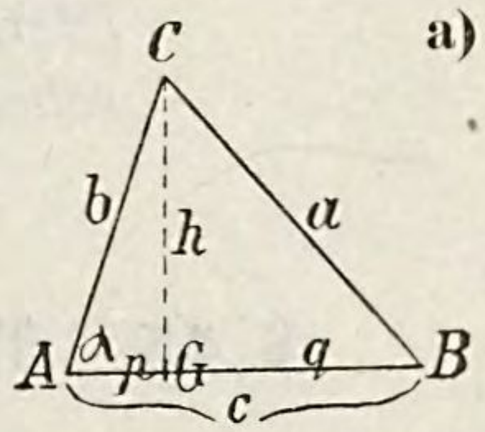
V. Das Dreieck im allgemeinen.

§ 43. Sinussatz. 1) Es sei $\alpha < 90^0$ und CG $\perp$ AB, so ist

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{b}},\quad \sin\beta = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}$$

also $\sin\alpha : \sin\beta = \mathrm{a} : \mathrm{b}$.

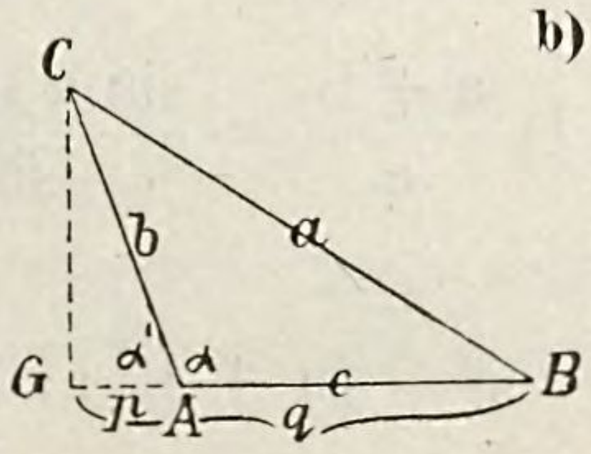
a)



2) Wenn $\alpha > 90^0$, ist ebenso

$$\sin\alpha = \sin\alpha' = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{b}} \text{ u. s. w.}$$

b)

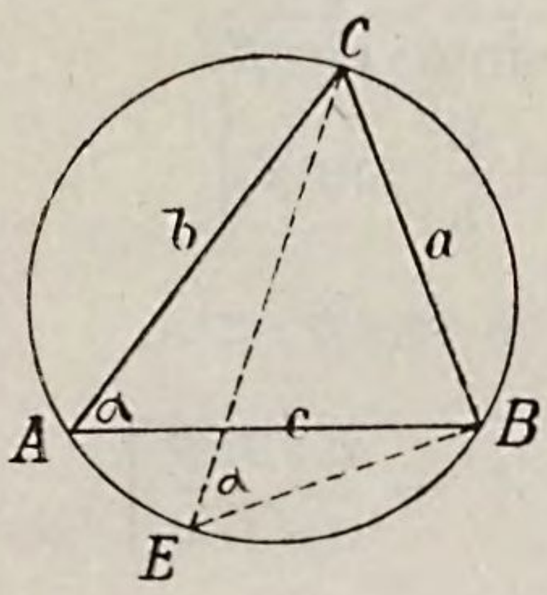


3) Wenn $\alpha = 90^0$, ist

$\sin \alpha = 1$, und $\sin \beta = \frac{b}{a}$, also $\sin \alpha : \sin \beta = a : b$.

Somit $\mathbf{a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma}$ **(23)**

Satz. *Die Dreieckseiten verhalten sich wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.*



Anderer Beweis. Beschreibe um das Dreieck einen Kreis (Radius r) und ziehe den Durchmesser CE, so ist

$$\sin \sphericalangle E = \frac{BC}{CE}, \text{ folglich}$$

$$2r = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

woraus der Satz folgt.

§ 44. Kosinussatz. 1) Es sei $\alpha < 90^0$, (Figur § 43 a), so ist

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cp = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$

2) Es sei $\alpha > 90^0$ (Fig. § 43b), so ist

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cp = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos \alpha'$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

3) Wenn $\alpha = 90^0$, so ist $\cos \alpha = 0$, und somit gilt die Formel ebenfalls.

Demnach $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.}$ **(24)**

Satz. *Das Quadrat über einer Dreieckseite ist gleich der Summe der Quadrate über den andern Seiten vermindert um das doppelte Produkt derselben, letzteres multipliziert mit dem Kosinus ihres Zwischenwinkels.*

§ 45. Tangentensatz. Aus dem Sinussatz folgt:

$$1) \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

$$(a + b) : c = \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

$$2)\ \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

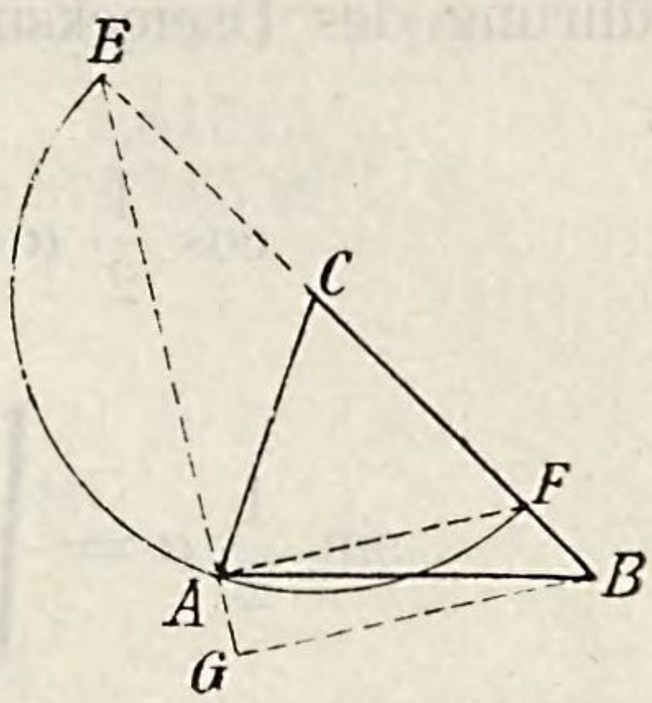
$$(a-b) : c = \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) : \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

$$3)\ \frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

$$\mathbf{(a+b) : (a-b) = tg\frac{1}{2}(\alpha+\beta) : tg\frac{1}{2}(\alpha-\beta).\ (25)}$$

Satz. *Die Summe zweier Dreieckseiten verhält sich zu ihrer Differenz wie die Tangente der halben Summe zur Tangente der halben Differenz ihrer Gegenwinkel.*

Anderer Beweis. Beschreibe von C aus mit b einen Halbkreis EF, so ist:



$$BE = a+b.\quad BF = a-b.$$

$$\sphericalangle AFE = \frac{1}{2}(\alpha+\beta),\ \sphericalangle BAF = \frac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Man ziehe noch BG ∥ AF, so ist:

$$1)\ \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{BG}{BE},\quad \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{BG}{AB}.$$

$$2)\ \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{EG}{BE},\quad \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{AG}{AB}.$$

$$3)\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{EG}{BG},\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{AG}{BG}.$$

Hieraus sind obige drei Formeln sofort abzuleiten.

§ 46. Winkelformeln. Aus den drei Seiten eines Dreiecks die drei Winkel zu bestimmen.

1) Aus **24** folgt $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

2) Durch Übergang zum halben Winkel (Formel **17** und **18**) erhält man Ausdrücke, welche sich zur logarithmischen Rechnung eignen:

$$\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left[1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(a+b+c)\,(-a+b+c)}{4bc}}$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left[1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(a-b+c)\,(a+b-c)}{4bc}}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(a+b+c)\,(-a+b+c)}{(a-b+c)\,(a+b-c)}}$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cdot\cos\frac{1}{2}\alpha$$

$$= \frac{1}{2bc}\sqrt{(a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}.$$

3) Übersichtlichere Formeln erhalten wir durch Einführung des Dreiecksumfangs u. Es ist alsdann:

$$\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}u\left(\frac{1}{2}u-a\right)}{bc}}$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}u-b\right)\left(\frac{1}{2}u-c\right)}{bc}}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}u\left(\frac{1}{2}u-a\right)}{\left(\frac{1}{2}u-b\right)\left(\frac{1}{2}u-c\right)}} \qquad \textbf{(26)}$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{\frac{1}{2}u\left(\frac{1}{2}u-a\right)\left(\frac{1}{2}u-b\right)\left(\frac{1}{2}u-c\right)}.$$

§ 47. Flächensatz. Es ist $h = b\sin\alpha$ (Fig. § 43 a u. b). Somit

1) $$\Delta = \frac{1}{2}\,b\,c\sin\alpha. \qquad \textbf{(27)}$$

Satz. *Die Dreiecksfläche ist gleich dem halben Produkt zweier Seiten multipliziert mit dem Sinus ihres Zwischenwinkels.*

2) Hieraus folgt mit Benützung der Winkelformeln:

$$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}u\left(\frac{1}{2}u-a\right)\left(\frac{1}{2}u-b\right)\left(\frac{1}{2}u-c\right)}$$

Vergleiche Plan. **111.**

§ 48. Berechnung des Dreiecks. Erster Fall. Gegeben eine Seite c und zwei Winkel α, β, somit auch der dritte Winkel γ.

$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}, \quad b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}, \quad \Delta = \frac{1}{2} b c \sin \alpha.$$

Beispiel. $c = 42{,}587\ m$, $\alpha = 34^0\,17'20''$, $\beta = 49^0\,54'10''$, $\gamma = 95^0\,48'30''$.

$\log a =$	1,62928
	+9,75079−10
	−9,99777+10
$=$	1,38230
$a =$	24,116 *m*

$\log b =$	1,62928
	+9,88364−10
	−9,99777+10
$=$	1,51515
$b =$	32,745 *m*

$\log \Delta =$	0,69897−1
	+1,51515
	+1,62928
	+9,75079−10
$=$	2,59419
$\Delta =$	392,82 *qm*

§ 49. Berechnung des Dreiecks. Zweiter Fall. Gegeben zwei Seiten a u. b und der Zwischenwinkel γ.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c}. \quad \sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c}.$$

Diese Art der Berechnung ist unbequem.

Oder aus: $(a+b):(a-b) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

berechnet sich, da $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$ bekannt ist, $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, womit man α und β hat. Für die dritte Seite c kann man nehmen

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$= \frac{(a + b) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{(a - b) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

Beispiel. $a = 54{,}39\ m.$ $b = 46{,}28\ m.$ $\gamma = 82^0\,44'.$

$a + b = 100{,}67\ m.$ $a - b = 8{,}11\ m.$ $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 48^0\,38'.$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \begin{array}{r} 0{,}90902 \\ +10{,}05523 - 10 \\ -\ 2{,}00290 \\ \hline = \quad 8{,}96135 - 10 \end{array}$$

$\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 5^0\,14'.$ $\alpha = 53^0\,52'.$ $\beta = 43^0\,24'.$ u. s. w.

§ 50. Berechnung des Dreiecks. Dritter Fall. Gegeben zwei Seiten a und b und ein Gegenwinkel α.

Es ist $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$.

Einschränkung. Es muß $a \leqq b \sin \alpha$. (d. h. $a \leqq h$).

Es ergeben sich zwei Werte für β, ein spitzer β_1 und dessen Supplement β_2.

Wenn $a > b$, muß auch $\alpha > \beta$ sein, und es ist nur β_1 zulässig.

Wenn $a < b$ sind beide Werte zulässig und man hat zwei Dreiecke, welche der Aufgabe entsprechen.

Die übrigen Elemente berechnen sich nach dem ersten Fall.

§ 51. Berechnung des Dreiecks. Vierter Fall. Gegeben die drei Seiten. Formeln in § 46.

Beispiel. $a = 499{,}7\ m,$ $b = 600{,}2\ m,$ $c = 698{,}3\ m,$

$u = 1798{,}2\ m.$ $\frac{1}{2}u = 899{,}1\ m.$

$\frac{1}{2}u - a = 399{,}4\ m,$ $\frac{1}{2}u - b = 298{,}9\ m,$ $\frac{1}{2}u - c = 200{,}8\ m.$

$$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{array}{r} 2{,}95381 \\ +2{,}60141 \\ -2{,}47553 \\ -2{,}30276 \end{array}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{array}{r} 25{,}55522 \\ -4{,}77829-20 \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (20{,}77693 - 20)$$

$$= 10{,}38847 - 10.$$

$$\frac{1}{2}\alpha = 22^0\,14'. \quad \alpha = 44^0\,28'. \text{ u. s. w.}$$

§ 52. Trigonometrische Analysis.

Beispiel 1. Aufgabe. Ein Dreieck zu berechnen aus dem Umfang u und den drei Winkeln (α, β, γ).

$$(a + b + c) : a = (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) : \sin\alpha.$$

$$a = \frac{u \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \frac{u \cdot \sin\alpha}{4 \cos\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\beta \cdot \cos\frac{1}{2}\gamma}$$

$$= \frac{u \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha}{2 \cos\frac{1}{2}\beta \cdot \cos\frac{1}{2}\gamma}.$$

Planimetrische Konstruktion.

Beispiel 2. Aufgabe. Ein Dreieck zu berechnen aus der Grundlinie c, der Differenz der Seiten d und der Differenz der Winkel an der Grundlinie δ (Planimetrie § 77).

$$(a - b) : c = \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{c \sin\frac{1}{2}\delta}{d} \text{ u. s. w.}$$

Beispiel 3. Aufgabe. Ein Dreieck zu berechnen aus den drei Winkeln (α, β, γ) und dem Radius des eingeschriebenen Kreises (r').

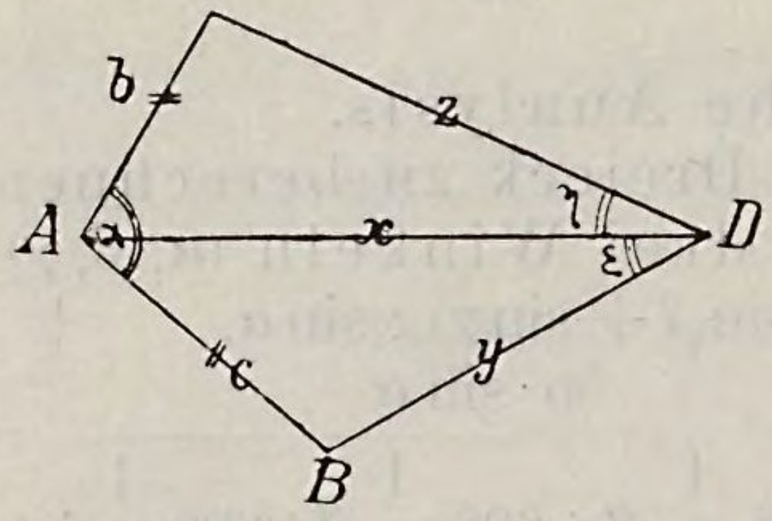
$$c = r' \cdot (\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta) = r' \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha \cdot \sin\frac{1}{2}\beta}.$$

Beispiel 4. Aufgabe. Ein Dreieck zu berechnen aus der Grundlinie c, dem Winkel an der Spitze γ und der Höhe h.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2 \\ \text{II} & ab\sin\gamma = ch. \end{array}\right\} \text{ u. s. w.}$$

Planimetrische Konstruktion.

Beispiel 5. Aufgabe. Zu drei Punkten A, B, C einen vierten D zu suchen, von welchem aus man die Seiten des gegebenen Dreiecks unter gegebenen Winkeln sieht (AB unter dem Winkel ε, AC unter dem Winkel η). — Pothenot'sche Aufgabe. (Plan. § 135, Beisp. 2).



Gegeben AB = c, AC = b,
$\sphericalangle$ BAC = α, $\sphericalangle$ ADB = ε,
$\sphericalangle$ ADC = η.

Gesucht AD = x, BD = y,
CD = z. ($\sphericalangle$ B = β, $\sphericalangle$ C = γ)

I $x : c = \sin\beta : \sin\varepsilon$
II $x : b = \sin\gamma : \sin\eta$
III $\beta + \gamma = 360^0 - (\alpha + \varepsilon + \eta)$.

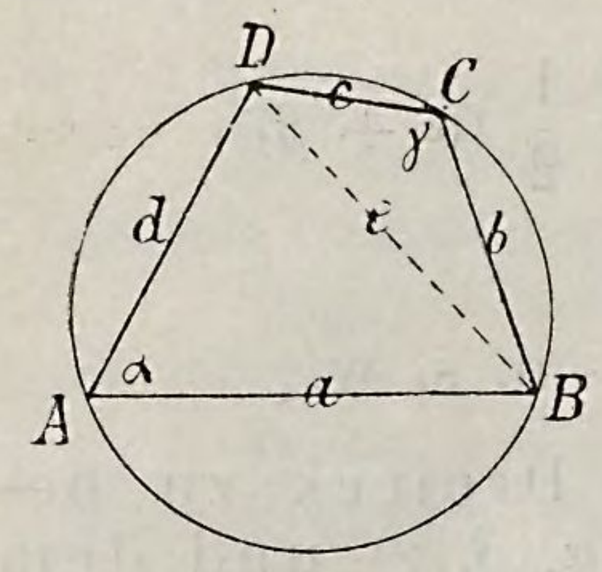
Aus I und II folgt III $\dfrac{c \sin\beta}{\sin\varepsilon} = \dfrac{b \sin\gamma}{\sin\eta}$

oder $\sin\beta : \sin\gamma = b \sin\varepsilon : c \sin\eta$.

$$\frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\sin\beta - \sin\gamma} = \frac{b \sin\varepsilon + c \sin\eta}{b \sin\varepsilon - c \sin\eta}; \quad \frac{c \sin\eta}{b \sin\varepsilon} = \operatorname{tg}\varphi.$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cdot\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = \frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg}(45^0+\varphi).$$

Hieraus $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ und damit das übrige.



Beispiel 6. Aufgabe. Die Fläche eines Sehnenvierecks aus den vier Seiten a, b, c, d zu berechnen.

Es ist $e^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cdot\cos\alpha$
$= b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\gamma$.

Da nun $\alpha + \gamma = 180^0$, so ist

$$\cos\alpha = \frac{(a^2+d^2)-(b^2+c^2)}{2(ad+bc)}$$

$$\text{Somit } \cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left[1+\frac{(a^2+d^2)-(b^2+c^2)}{2(ad+bc)}\right]}$$
$$= \sqrt{\frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)}{4(ad+bc)}}$$
$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left[1-\frac{(a^2+d^2)-(b^2+c^2)}{2(ad+bc)}\right]}$$
$$= \sqrt{\frac{(a-d+b+c)\cdot(-a+d+b+c)}{4(ad+bc)}}$$

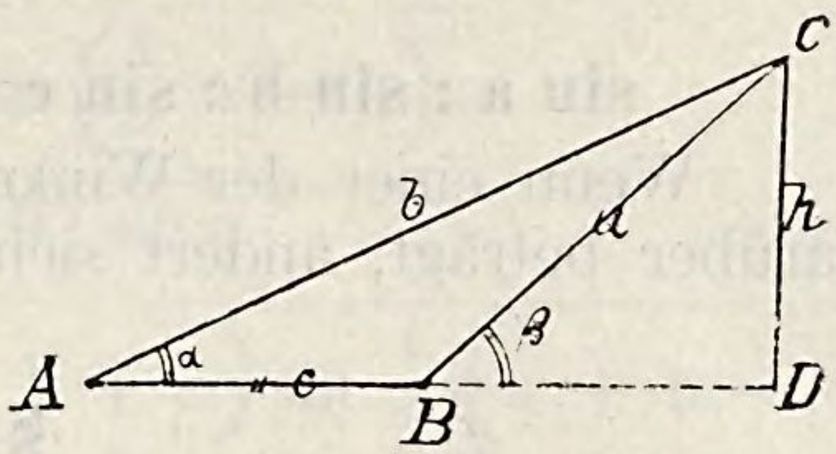
$$\text{Viereckfläche} = \frac{1}{2}(ad+bc)\sin\alpha = (ad+bc)\cdot 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cdot\cos\frac{1}{2}\alpha.$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\begin{matrix}(a+b+c-d)\ \ (a+b-c+d)\\(a-b+c+d)\ (-a+b+c+d)\end{matrix}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}u-a\right)\left(\frac{1}{2}u-b\right)\left(\frac{1}{2}u-c\right)\left(\frac{1}{2}u-d\right)}.$$

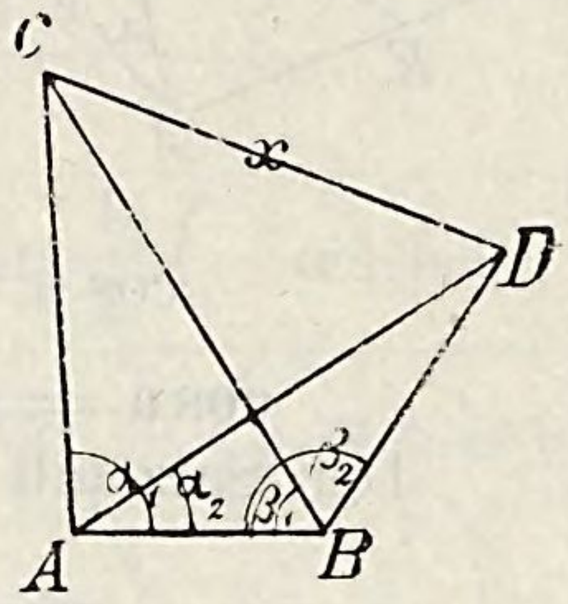
§ 53. Anwendungen.

Beispiel 1. Die Höhe h eines Turmes (Berges) zu bestimmen, wenn bekannt ist eine auf den Turm zu gerichtete Standlinie AB = c und die Elevationswinkel α u. β am Anfang und am Ende derselben.



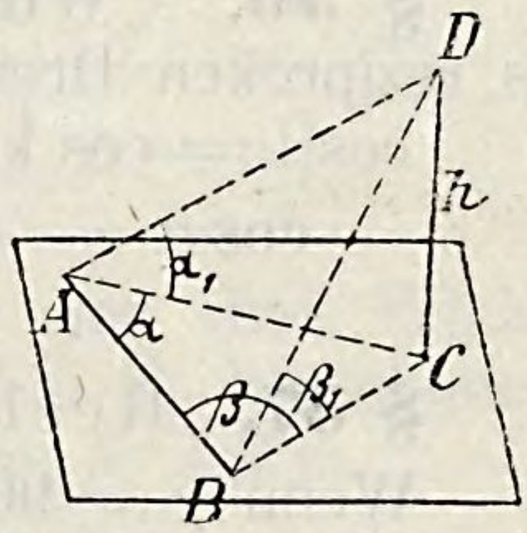
$$h = b\sin\alpha = \frac{\sin\alpha\ \sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} \text{ oder } h = a\sin\beta = \frac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Beispiel 2. Bekannt die Standlinie AB = a. Zu bestimmen die Entfernung der Orte C und D = x, wenn gemessen werden $\sphericalangle CAB = \alpha_1$, $\sphericalangle DAB = \alpha_2$, $\sphericalangle CBA = \beta_1$, $\sphericalangle DBA = \beta_2$. (Triangulation).



Es ergeben sich aus △ ABC und △ ABD die Seiten AC und BC, AD und BD, alsdann x aus △ CAD oder aus △ CBD.

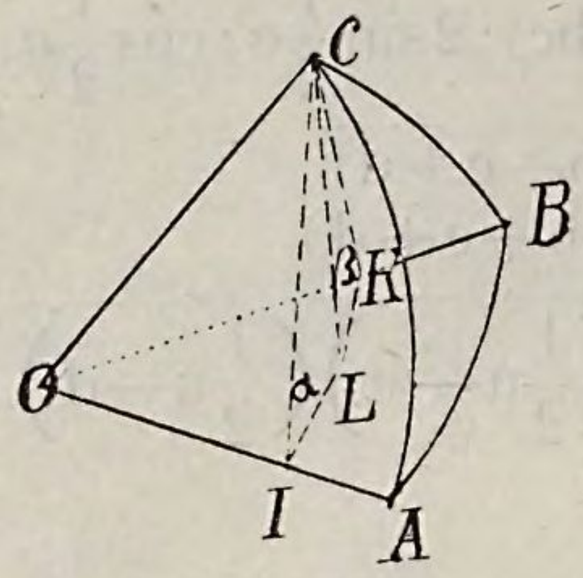
Beispiel 3. Dieselbe Aufgabe wie in Beispiel 1, nur mit dem Unterschied, daß die Standlinie AB nicht auf den Turm CD zu gerichtet ist.



Man mißt $\sphericalangle CAB = \alpha$ und $\sphericalangle CBA = \beta$ und findet damit AC und BC. Hat man dann den Elevationswinkel $\sphericalangle CAD = \alpha_1$ gemessen, so ergiebt sich die Höhe h. Hat man auch den zweiten Elevationswinkel $\sphericalangle CBD = \beta_1$ gemessen, so dient das zweite Ergebnis zur Probe für das erste.

VI. Das sphärische Dreieck.

§ 54. Sinussatz. Zu dem körperlichen Dreieck △ OABC gehöre das sphärische Dreieck ABC. (Seiten a, b, c, Winkel α, β, γ). Der Radius der Kugelfläche sei gleich der Einheit.



Errichtet man CL ⊥ Ebene AOB und LI ⊥ OA, LK ⊥ OB beide in der Ebene AOB, so ist auch CI ⊥ OA und CK ⊥ OB, also

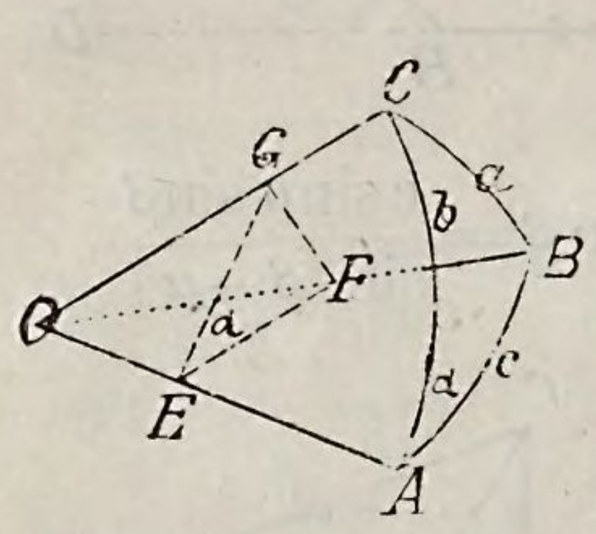
$$\alpha = \sphericalangle \mathrm{CIL}. \quad \beta = \sphericalangle \mathrm{CKL}.$$

$$\text{Also } \sin\alpha = \frac{\mathrm{CL}}{\mathrm{CI}}, \quad \sin\beta = \frac{\mathrm{CL}}{\mathrm{CK}},$$

$$\text{also } \sin\alpha : \sin\beta = \mathrm{CK} : \mathrm{CI}$$
$$= \sin \mathrm{a} : \sin \mathrm{b}.$$

$$\mathbf{\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.} \quad \mathbf{(28)}$$

Wenn einer der Winkel oder eine der Seiten 90^0 oder darüber beträgt, ändert sich an dem Beweisgang nichts.



§ 55. Seitenkosinussatz.

Es sei $\sphericalangle \mathrm{FEG} = \alpha$; so ist

$$\left.\begin{aligned}\overline{\mathrm{FG}}^2 &= \overline{\mathrm{EF}}^2 + \overline{\mathrm{EG}}^2 - 2\cdot\mathrm{EF}\cdot\mathrm{EG}\cdot\cos\alpha\\ \overline{\mathrm{FG}}^2 &= \overline{\mathrm{OF}}^2 + \overline{\mathrm{OG}}^2 - 2\cdot\mathrm{OF}\cdot\mathrm{OG}\cdot\cos\mathrm{a}\end{aligned}\right\}$$

folglich $2\,\mathrm{OF}\cdot\mathrm{OG}\cos\mathrm{a} = (\overline{\mathrm{OF}}^2 - \overline{\mathrm{EF}}^2) + (\overline{\mathrm{OG}}^2 - \overline{\mathrm{EG}}^2) + 2\cdot\mathrm{EF}\cdot\mathrm{EG}\cdot\cos\alpha.$

$$\cos\mathrm{a} = \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OF}}\cdot\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OG}} + \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{OF}}\cdot\frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{OG}}\cdot\cos\alpha.$$

$$\mathbf{\cos a = \cos b\,\cos c + \sin b\,\sin c\cdot\cos\alpha.} \quad \mathbf{(29)}$$

Der Satz gilt für alle Fälle.

§ 56. Winkelkosinussatz. Es seien die Seiten des reziproken Dreiecks i, k, l, dessen Winkel ι, $\varkappa$, λ, so ist

$$\cos\mathrm{i} = \cos\mathrm{k}\,\cos\mathrm{l} + \sin\mathrm{k}\,\sin\mathrm{l}\,\cos\iota;\ \text{hieraus}$$

$$\mathbf{\cos\alpha = -\cos\beta\,\cos\gamma + \sin\beta\,\sin\gamma\,\cos a.} \quad \mathbf{(30)}$$

§ 57. Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.

Wenn $\gamma = 90^0$, so ist

$$\sin\alpha = \frac{\sin\mathrm{a}}{\sin\mathrm{c}}, \quad \sin\beta = \frac{\sin\mathrm{b}}{\sin\mathrm{c}},$$

$$\cos\mathrm{c} = \cos\mathrm{a}\cdot\cos\mathrm{b}, \quad \cos\mathrm{c} = \mathrm{cotg}\,\alpha\cdot\mathrm{cotg}\,\beta.$$

§ 58. Quadrantendreieck.

Wenn $\mathrm{c} = 90^0$, so ist

$$\sin\mathrm{a} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \quad \sin\mathrm{b} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$

$$\cos\gamma = -\,\mathrm{cotg\,a}\cdot\mathrm{cotg\,b}, \quad \cos\gamma = -\cos\alpha\cdot\cos\beta.$$

§ 59. Winkelformeln. Aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks die drei Winkel zu berechnen.

Aus **29** folgt $\cos \alpha = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$.

Hieraus leiten sich ab: $[a + b + c = u]$

$$\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin \frac{1}{2}(-a+b+c)}{\sin b \cdot \sin c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} u \cdot \sin \left(\frac{1}{2} u - a\right)}{\sin b \cdot \sin c}}$$

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a - b + c) \sin \frac{1}{2}(a + b - c)}{\sin b \cdot \sin c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin \left(\frac{1}{2} u - b\right) \sin \left(\frac{1}{2} u - c\right)}{\sin b \cdot \sin c}}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin \frac{1}{2}(-a+b+c)}{\sin \frac{1}{2}(a - b + c) \sin \frac{1}{2}(a + b - c)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} u \cdot \sin \left(\frac{1}{2} u - a\right)}{\sin \left(\frac{1}{2} u - b\right) \sin \left(\frac{1}{2} u - c\right)}}$$

§ 60. Seitenformeln. Aus den drei Winkeln eines sphärischen Dreiecks die drei Seiten zu berechnen.

Aus **30** folgt: $\cos \alpha = \dfrac{\cos \alpha + \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}$

Hieraus leiten sich ab: $[\alpha + \beta + \gamma = v]$

$$\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) \cdot \cos \frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}}$$

$$= \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2} v \cdot \cos \left(\frac{1}{2} v - \alpha\right)}{\sin \beta \sin \gamma}}$$

$$\cos\frac{1}{2}\,\mathrm{a} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}\left(\alpha-\beta+\gamma\right)\cos\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta-\gamma\right)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\,v-\beta\right)\cos\left(\frac{1}{2}\,v-\gamma\right)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\mathrm{a} = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta+\gamma\right)\cdot\cos\frac{1}{2}\left(-\alpha+\beta+\gamma\right)}{\cos\frac{1}{2}\left(\alpha-\beta+\gamma\right)\cos\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta-\gamma\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}\,v\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\,v-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\,v-\beta\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\,v-\gamma\right)}}.$$

§ 61. Gaussische Formeln. Es ist

$$\sin\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta\right) = \sin\frac{1}{2}\,\alpha\cdot\cos\frac{1}{2}\,\beta+\cos\frac{1}{2}\,\alpha\cdot\sin\frac{1}{2}\,\beta.$$

Setzt man hier die Ausdrücke aus § 59 ein, so ergiebt sich

$$1)\ \sin\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta\right) : \cos\frac{1}{2}\,\gamma = \cos\frac{1}{2}\left(\mathrm{a}-\mathrm{b}\right) : \cos\frac{1}{2}\,\mathrm{c}.$$

Ebenso ergeben sich

$$2)\ \sin\frac{1}{2}\left(\alpha-\beta\right) : \cos\frac{1}{2}\,\gamma = \sin\frac{1}{2}\left(\mathrm{a}-\mathrm{b}\right) : \sin\frac{1}{2}\,\mathrm{c}.$$

$$3)\ \cos\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta\right) : \sin\frac{1}{2}\,\gamma = \cos\frac{1}{2}\left(\mathrm{a}+\mathrm{b}\right) : \cos\frac{1}{2}\,\mathrm{c}.$$

$$4)\ \cos\frac{1}{2}\left(\alpha-\beta\right) : \sin\frac{1}{2}\,\gamma = \sin\frac{1}{2}\left(\mathrm{a}+\mathrm{b}\right) : \sin\frac{1}{2}\,\mathrm{c}.$$

§ 62. Neper'sche Analogien. Aus den vorhergehenden Formeln folgt:

$$1)\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta\right) = \frac{\cos\frac{1}{2}\left(\mathrm{a}-\mathrm{b}\right)}{\cos\frac{1}{2}\left(\mathrm{a}+\mathrm{b}\right)}\cdot\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\,\gamma.$$

$$2)\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma.$$

$$3)\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}c.$$

$$4)\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}c.$$

§ 63. Berechnung des sphärischen Dreiecks.

Erster Fall. Gegeben die drei Seiten — nach § 59. Ebenso

Sechster Fall. Gegeben die drei Winkel — nach § 60.

Zweiter Fall. Gegeben zwei Seiten a und b und der Zwischenwinkel (γ)

Mit Hülfe der ersten und zweiten Neper'schen Analogie findet man die Winkel α und β, und dann die Seite c entweder nach dem Sinussatz oder nach einer der Gaussischen Formeln. — Ebenso

Fünfter Fall. Gegeben zwei Winkel α und β und die Zwischenseite c. a und b mit Hülfe der dritten und vierten Neper'schen Analogie, γ nach dem Sinussatz oder nach einer der Gaussischen Formeln.

Dritter Fall. Gegeben zwei Seiten a und b und ein Gegenwinkel α.

Man erhält den andern Gegenwinkel β nach dem Sinussatz:

$$\sin\beta=\frac{\sin\alpha\ \sin b}{\sin a}.$$

Einschränkung: $\sin\alpha\ \sin b \leqq \sin a$.

β ist zweideutig; $\beta_1 < 90^0$ und $\beta_2 > 90^0$. Es muß jedoch, wenn $a > b$ auch $\beta > \alpha$ sein.

Die Seite c ergiebt sich nach der dritten oder vierten, und der Winkel γ nach der ersten oder zweiten Neper'schen Analogie. — Ebenso

Vierter Fall. Gegeben zwei Winkel α und β und eine Gegenseite a.

Man erhält die andere Gegenseite nach dem Sinussatz:

$$\sin b = \frac{\sin a \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Einschränkung: $\sin a \sin \beta \leqq \sin \alpha$.
b ist zweideutig: $b_1 < 90^0$ und $b_2 > 90^0$. Es muß jedoch wenn $\alpha > \beta$ auch $a > b$ sein.

Der Winkel γ ergiebt sich nach der ersten oder zweiten, die Seite c nach der dritten oder vierten Neperschen Analogie.

Bayerische Staatsbibliothek München

Sickenberger, Adolf, Professor am k. Luitpoldsgymnasium in München, Leitfaden der elementaren Mathematik. Erster Teil: Algebra. Zweiter Teil: Planimetrie. (Befindet sich unter der Presse.) Jeder Teil wird 5 bis 6 Bogen stark.

—, Leitfaden der Arithmetik nebst Übungsbeispielen. Vierte Auflage. IV u. 192 S. 8°. 1888. 1.60 *M*.

—, Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafel zum Schul- und Handgebrauch zusammengestellt. (Unter der Presse.)

—, Die Determinanten in genetischer Behandlung. Zur Einführung für Anfänger. Zweiter Abdruck. VII u. 80 S. 8°. 1887. 1.60 *M*.

Günther, Siegmund, Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie zum Gebrauche in höheren Mittelschulklassen und bei akademischen Vorträgen. Zweite, durchaus umgearbeitete und vermehrte Auflage. XI u. 157 S. gr. 8° mit 52 Textillustrationen. 1886. 2 *M*.

Knilling, Rudolf, Zur Reform des Rechenunterrichts in den Volksschulen. Erste Abteilung: Mein Programm. — Kritik der Pestalozzischen, Grubeschen und gegenwärtigen Rechenmethode. II u. 172 S. gr. 8°. 1884. 1.40. *M*.

—, Zweite Abteilung. Fortsetzung und Schluß des theoretischen Teiles. Beschreibung des Rechentisches, Teillineals und verbesserten Zweisatzes. Praktischer Teil. VII u. 268 S. gr. 8°. 1886. 3.60 *M*.

Lüroth, Jacob, Grundriss der Mechanik. IV u. 80 S. gr. 8°. 1881. 1.40 *M*.

Reckuagel, Georg, Ebene Geometrie für Schulen. Dritte, verbesserte Auflage. X u. 203 S. gr. 8° mit eingedr. Holzschn. 1885. 2 *M*.

Schüler, Wilh. Friedr., Neue Theorie des Imaginären in der Funktionenrechnung und der analytischen Geometrie. Programm zu dem Jahresberichte der K. bayerischen Realschule Freising pro 1877/78. Mit einer Tafel. II u. 56 S. 4°. 4 *M*.

— Lehrbuch der analytischen Geometrie des Punktes, der Geraden und der Kegelschnitte, dann der Strahlbüschel und Punktreihen (projektivische Geometrie). Mit Übungsaufgaben. Mit vier Tafeln in Steindruck. XI u. 247 S. gr. 8°. 1879. 4.80 *M*.

Walberer, Joh. Chr., Anfangsgründe der Mechanik fester Körper mit vielen Übungsaufgaben zum Schulgebrauche an Gymnasien und technischen Lehranstalten. Fünfte durchgesehene Auflage. VI u. 166 S. gr. 8°. Mit 50 Holzschnitten. 1885. 2.40 *M*.

— Leitfaden zum Unterrichte in der Arithmetik und Algebra an Gymnasien und verwandten Anstalten. Zweite Auflage. VIII u. 152 S. gr. 8°. 1884. 1.60 *M*.

Wenz, G., Zusammenstellung der wichtigsten arithmetischen und algebraischen Sätze in Formel, Wort und Beispiel. Ein Handbüchlein für den Rechen-Unterricht.

Erste Abteilung: Die Rechnungsarten für die Volks- und Mittelschulen ([IV u.] 32 S.) 8°. 1873. 30 *₰*.

Zweite Abteilung: Die Rechnungsarten für die höhern Lehranstalten. ([IV u.] 58 S.) 8°. 1873. 45 *₰*.

Jolly, Jul., Ein Kapitel vergleichender Syntax. Der Conjunctiv und Optativ und die Nebensätze im Zend und Altpersischen in Vergleich mit dem Sanskrit und Griechischen. gr. 8°. 1872. Preis 2.40 *M*.

— Geschichte des Infinitivs im Indogermanischen. gr. 8°. 1873. Preis 6 *M*.

— Schulgrammatik und Sprachwissenschaft. Studien über die Neugestaltung des grammatischen Unterrichts nach den Ergebnissen und der Methode der vergleichenden Sprachwissenschaft. gr. 8°. 1874. Preis 1.60 *M*.

Druck von C. Brügel und Sohn in Ansbach.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Sickenberger, Adolf

Leitfaden der elementaren Mathematik

Bd.: 3

1888

Math.p. 527 ne-1/3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651711-9